

UNIDADE 2 - VIBRAÇÕES LIVRES DE SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

2.1 - Introdução

A noção de vibração começa com a idéia do equilíbrio. Um sistema está em equilíbrio quando a resultante de todas as forças atuantes sobre o mesmo é nula. Qualquer sistema que esteja sob esta condição somente sairá dela quando ocorrer alguma perturbação externa. A oscilação irá ocorrer quando, após a perturbação atuar, o sistema apresentar a tendência a retornar à sua posição de equilíbrio. Ao se conceder ao pêndulo um ângulo inicial o mesmo entrará em movimento tendendo a retornar à sua posição de equilíbrio inicial. Ao passar por ela o movimento não se interrompe porque a massa do pêndulo adquiriu energia cinética. Enquanto esta energia permanecer presente no sistema o movimento oscilatório continuará. Se, entretanto, a energia inicial concedida for muito elevada, o pêndulo entrará em movimento rotativo. Situação semelhante ocorre com uma bola rolando dentro de uma superfície circular. Uma balança, com dois pesos iguais, apresentará comportamento equivalente (Fig. 2.1).

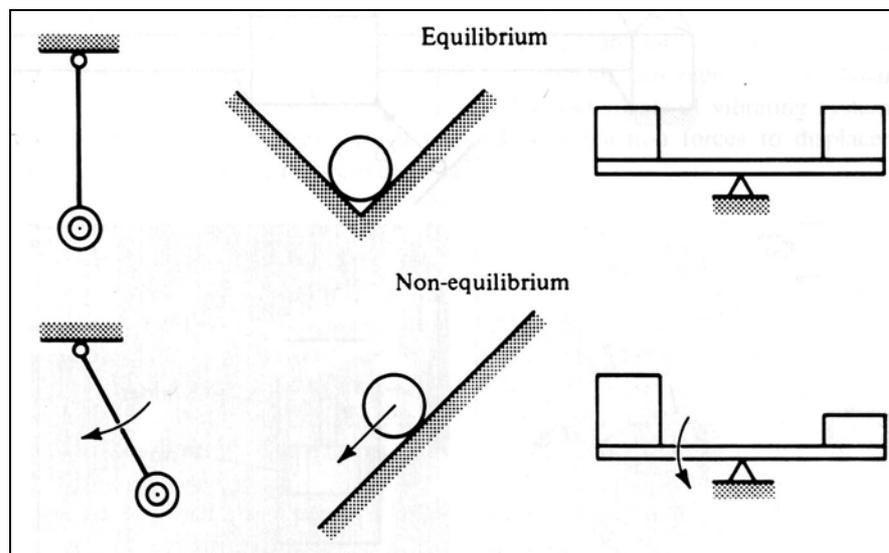


Figura 2.1 – Equilíbrio nos sistemas físicos.

O estudo de sistemas vibratórios deve começar por sistemas simples que apresentam características básicas capazes de permitir a análise de uma série de fenômenos presentes em sistemas mais complexos. Sistemas de **um grau de liberdade** são sistemas ideais, capazes de representar uma reduzida parte dos sistemas reais presentes no mundo físico, assim mesmo com grande simplificação. Por outro lado, estes mesmos sistemas apresentam características que fundamentam o entendimento da maioria dos aspectos básicos que estão presentes em sistemas mais complexos. Problemas como ressonância, transmissibilidade, balanceamento e isolamento podem ser devidamente estudados em sistemas de um grau de liberdade com posterior extensão dos conceitos para problemas de ordem maior. Por outro lado estimativas de comportamento podem ser estabelecidas com relativa facilidade e simplicidade matemática quando se cria um modelo simples para um sistema complexo. Razões como estas justificam a introdução do estudo de sistemas de um grau de liberdade em cursos de vibrações em engenharia.

A **vibração livre**, como já foi conceituada no Capítulo 1, ocorre quando o movimento resulta apenas de condições iniciais, não havendo nenhuma causa externa atuando durante o mesmo. O movimento de um pêndulo é um exemplo de vibração livre. Ao ser abandonado, com uma determinada condição inicial (ângulo inicial, por exemplo), o mesmo oscilará livremente.

2.2 – Modelos de Análise de Vibrações

Um sistema vibratório é um sistema dinâmico para o qual as variáveis tais como as excitações (causas, entradas, inputs) e respostas (efeitos, saídas, outputs) são dependentes do tempo. A resposta de um sistema vibratório depende, geralmente, das condições iniciais e das ações externas. Isto faz com que seja necessário estabelecer um procedimento de análise que permita o entendimento das influências de cada um dos fatores. O procedimento geral é o que começa com o estabelecimento de um modelo físico, determinação das equações diferenciais que governam o movimento (modelo matemático), solução destas equações e interpretação dos resultados.

2.2.1 - Modelo Físico

O propósito da modelagem física é representar todos os aspectos importantes existentes no sistema para a determinação das equações matemáticas que governam o movimento do sistema. O modelo deve então traduzir as características físicas do sistema nos elementos vibratórios básicos, como ilustra a Fig. 2.2. O modelo pode ser mais ou menos complexo, de acordo com as necessidades e com a capacidade de solução das equações do movimento: modelos mais complexos (com mais elementos) produzem um maior número de equações, cuja solução necessita do auxílio computacional. Outro fator é que muitas vezes a análise a se realizar não exige um refinamento muito elevado sendo possível conseguir boas interpretações em sistemas razoavelmente simples.

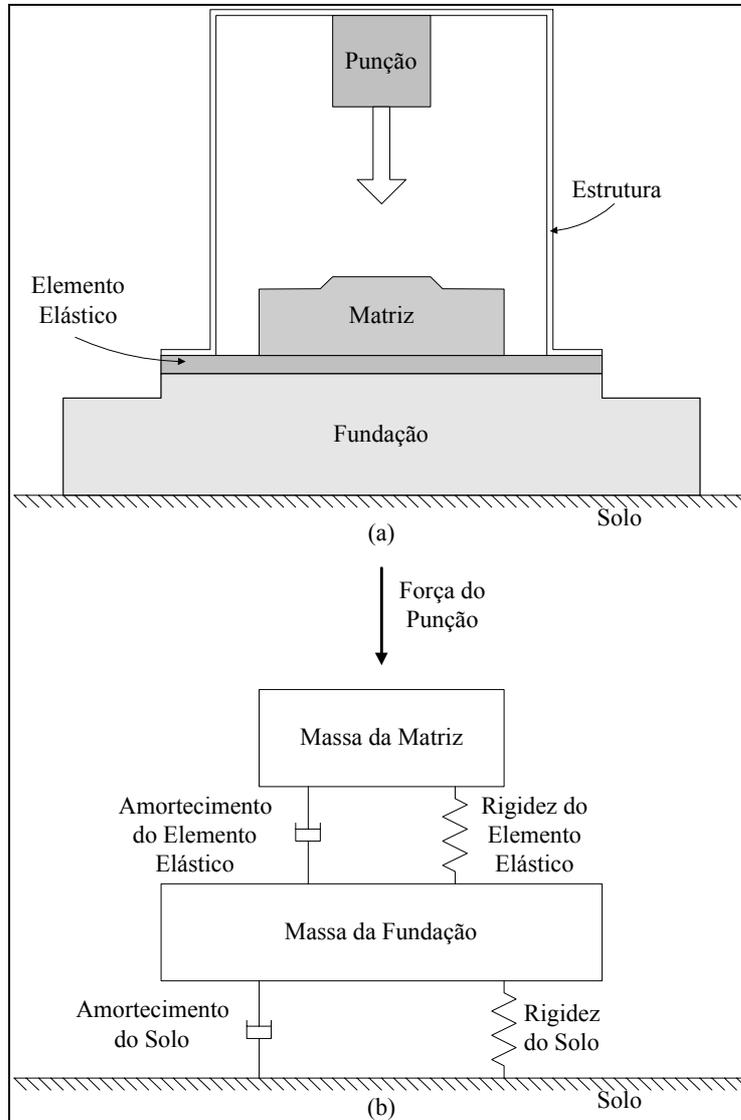


Figura 2.2 - Modelo de uma prensa.

Os elementos que compõem um sistema vibratório são de três tipos, relacionando forças com deslocamentos, velocidades e acelerações, respectivamente.

2.2.1.1 - Elemento Mola

O elemento responsável por relacionar forças com deslocamentos é representado, nos sistemas vibratórios, pela **mola**, como mostra a Fig. 2.3a. Assume-se que a mola não possui massa, de forma que uma força F_m atuando em uma extremidade deve ser equilibrada por outra força de igual magnitude mas de sentido contrário, atuando na outra extremidade. Pela atuação da força F_m , a mola se alonga (ou se contrai, se as forças atuarem com sentidos contrários). Esta deformação é igual à diferença entre os deslocamentos x_2 e x_1 . A Fig. 2.3b mostra uma curva *força/deformação* típica de uma mola comum. Esta curva é não linear. Entretanto, para pequenas deformações, pode-se considerar que existe uma proporcionalidade entre a força e a deformação, sendo k a constante de proporcionalidade, conhecida como **constante de mola** ou **rigidez**. As unidades de k no Sistema Internacional (SI), são **newton por metro (N/m)**. F_m é uma força elástica, conhecida como força de restauração, porque uma mola alongada ou comprimida tende sempre retornar à sua posição não deformada.

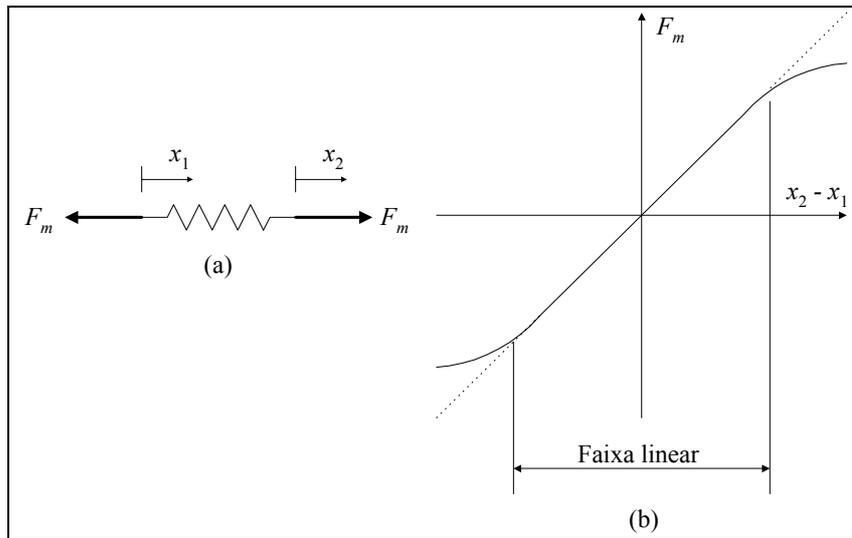


Figura 2.3 - Elemento mola.

A relação entre força e deslocamento é expressa por

$$F_m = k(x_2 - x_1) \quad (2.1)$$

O elemento mola representa a capacidade que o sistema físico tem em armazenar energia. Esta capacidade é, muitas vezes, expressa pela elasticidade presente. Em analogia com um sistema elétrico, a mola pode ser comparada a um capacitor sendo o elemento que armazena energia na forma de energia potencial em um determinado instante do movimento e depois a devolve para que o sistema vibratório a transforme em energia cinética ou a dissipe. A energia potencial armazenada pela mola é dada por

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.2)$$

Associação de molas em paralelo

As molas podem ser associadas de várias formas. As associações em *paralelo* e em *série*, mostradas na Fig. 2.4a e 2.4b, respectivamente, são as mais comuns.

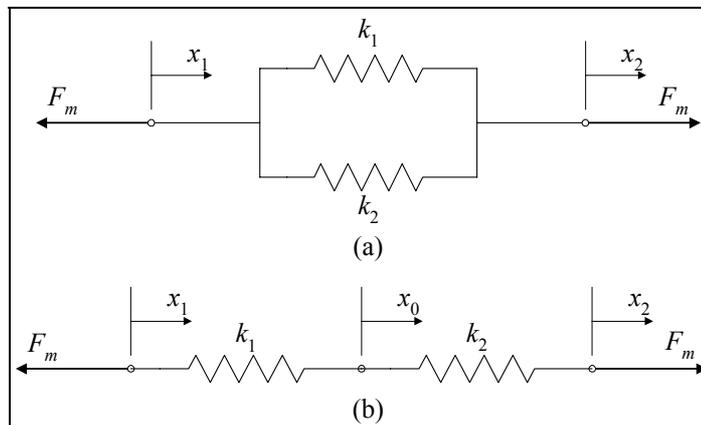


Figura 2.4 - Associação de molas

Para as molas em paralelo (Fig. 2.4a) a força atuante na mola se divide em duas, de forma que

$$F_m = F_{m_1} + F_{m_2} \quad (2.3)$$

Cada uma das molas está submetida à relação

$$\begin{aligned} F_{m_1} &= k_1(x_2 - x_1) \\ F_{m_2} &= k_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Uma mola equivalente ao conjunto das duas molas deve possuir uma constante de forma que

$$F_m = k_{eq}(x_2 - x_1) \quad (2.5)$$

Introduzindo (2.4) em (2.3) e considerando (2.5) chega-se a

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (2.6)$$

Generalizando, para um conjunto de n molas associadas em paralelo

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i \quad (2.7)$$

Associação de molas em série

Observando a Fig. 2.4b, as seguintes relações podem ser escritas para molas em série:

$$F_m = k_1(x_0 - x_1) = k_2(x_2 - x_0) \quad (2.8)$$

que podem ser escritas na forma

$$x_0 - x_1 = \frac{F_m}{k_1} \quad \text{e} \quad x_2 - x_0 = \frac{F_m}{k_2} \quad (2.9)$$

Como para uma mola única vale a expressão (2.5), tem-se que

$$\frac{F_m}{k_{eq}} = x_2 - x_1 = (x_2 - x_0) + (x_0 - x_1) = \frac{F_m}{k_2} + \frac{F_m}{k_1}$$

o que conduz a

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \quad (2.10)$$

Para um conjunto de n molas associadas em série

$$k_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}} \quad (2.11)$$

Sistemas elásticos

Um elemento elástico pode ser deformado em várias direções. Cada relação entre uma força em uma direção e uma deformação na mesma ou em outra direção produz uma diferente constante de mola. A equação (2.12) pode, portanto se apresentar na forma mais geral

$$F_i = k_{ij} x_j \quad (2.12)$$

onde i e j podem indicar, por exemplo, translações e rotações ao longo ou em torno de três eixos de um sistema de coordenadas cartesianas. Portanto, i e j podem assumir seis valores diferentes. Genericamente existirão 6x6 coeficientes independentes k_{ij} , relacionados com uma possível aplicação do esforço (força ou momento) e a direção do deslocamento produzido.

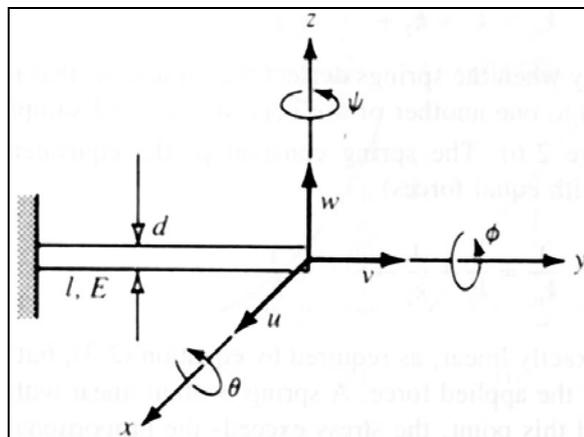


Figura 2.5 – Definição de constantes de mola para a viga engastada.

Considere-se, por exemplo, a viga engastada da Fig. 2.5, com o sistema de coordenadas xyz , como indicado. Se a viga possui uma seção transversal circular de diâmetro d , área A e momentos de inércia I_x, I_y, I_z , comprimento L , módulo de elasticidade E , módulo de elasticidade transversal G , e se u, v, w , são as deflexões e θ, ϕ, ψ as rotações da sua extremidade livre com relação ao sistema de coordenadas xyz , da Resistência dos Materiais, se tem

$$\begin{aligned}
 F_v &= \frac{EA v}{L}, & k_{vv} &= \frac{EA}{L} \\
 F_u &= \frac{3EI_z u}{L^3}, & k_{uu} &= \frac{3EI_z}{L^3} \\
 F_w &= \frac{3EI_x w}{L^3}, & k_{ww} &= \frac{3EI_x}{L^3}
 \end{aligned} \tag{2.13a}$$

$$\begin{aligned}
 M_\phi &= \frac{GI_y \phi}{L}, & k_{\phi\phi} &= \frac{GI_y}{L} \\
 M_\psi &= \frac{EI_z \psi}{L}, & k_{\psi\psi} &= \frac{EI_z}{L} \\
 M_\theta &= \frac{EI_x \theta}{L}, & k_{\theta\theta} &= \frac{EI_x}{L}
 \end{aligned} \tag{2.13b}$$

onde $I_x = I_z = \pi d^4/64$ e $I_y = \pi d^4/32$, para uma seção circular.

Sistemas com um grau de liberdade possuem $i = j = 1$ e o sufixo da constante k é omitido.

Exemplo 2.1 - Um tambor, com um cabo de aço, é montado na extremidade de uma viga em balanço como mostra a Fig. 2.6(a). Determinar a constante de mola equivalente do sistema quando o comprimento suspenso do cabo é l . São conhecidos o comprimento da viga b , sua largura a e sua espessura t . Assumir que o diâmetro do cabo é d e os módulos de elasticidade da viga e do cabo são iguais a E .

Solução: A constante de mola da viga em balanço é dada por (2.13a)

$$k_b = \frac{3EI}{b^3} = \frac{3E \left(\frac{at^3}{12} \right)}{b^3} = \frac{Eat^3}{4b^3} \tag{a}$$

A rigidez do cabo submetido a carregamento axial é

$$k_r = \frac{EA}{l} = \frac{E \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)}{l} = \frac{E\pi d^2}{4l} \tag{b}$$

A viga em balanço e o cabo podem ser considerados como molas combinadas em série, cuja constante de mola equivalente é dada pela equação (2.10)

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r}} = \frac{1}{\frac{4b^3}{Eat^3} + \frac{4l}{E\pi d^2}} = \frac{E}{4} \left(\frac{\pi d^2 at^3}{\pi d^2 b^3 + lat^3} \right) \tag{c}$$

Exemplo 2.2 - A lança AB do guindaste mostrado na Fig. 2.7 é uma barra de aço uniforme de comprimento 10 m e área da seção transversal $2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. A massa de 1000 kg, suspensa pelo guindaste está parada. O cabo CDEBF é de aço e tem área da seção transversal de $0,1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Desprezando o efeito do segmento do cabo CDEB, determinar a constante de mola equivalente do sistema na direção vertical. O módulo de elasticidade do aço é $2,07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

Solução: A Fig. 2.7b mostra a combinação de molas, assumindo que tanto a lança quanto o cabo estão submetidos exclusivamente a carregamento axial, o que é válido uma vez que a lança é articulada na base do guindaste e o cabo trabalha sob tração. Como não está evidente a associação das molas em série ou em paralelo, deve-se usar a equivalência de energia potencial para determinar a constante de mola equivalente.

Um deslocamento vertical x do ponto B causará uma deformação $x_2 = x \cos 45^\circ$ na lança (constante k_2). O cabo se deformará $x_1 = x \cos(90^\circ - \theta)$.

Pela Lei dos Cossenos, o comprimento do cabo FB, l_1 é obtido por

$$l_1^2 = \overline{FA}^2 + l_2^2 - 2\overline{FA}l_2 \cos(\text{ângulo } \overline{FAl}_2) = 3^2 + 10^2 - 2 \times 3 \times 10 \times \cos 135^\circ = 151 \text{ m}^2 \tag{a}$$

A mesma Lei dos Cossenos, aplicada para determinar o ângulo θ resultará em

$$\begin{aligned}
 l_2^2 &= l_1^2 + \overline{FA}^2 - 2l_1 \overline{FA} \cos \theta \\
 \cos \theta &= \frac{l_1^2 - l_2^2 + \overline{FA}^2}{2l_1 \overline{FA}} = \frac{12,306^2 - 10^2 + 3^2}{2 \times 12,306 \times 3} = 0,819
 \end{aligned} \tag{b}$$

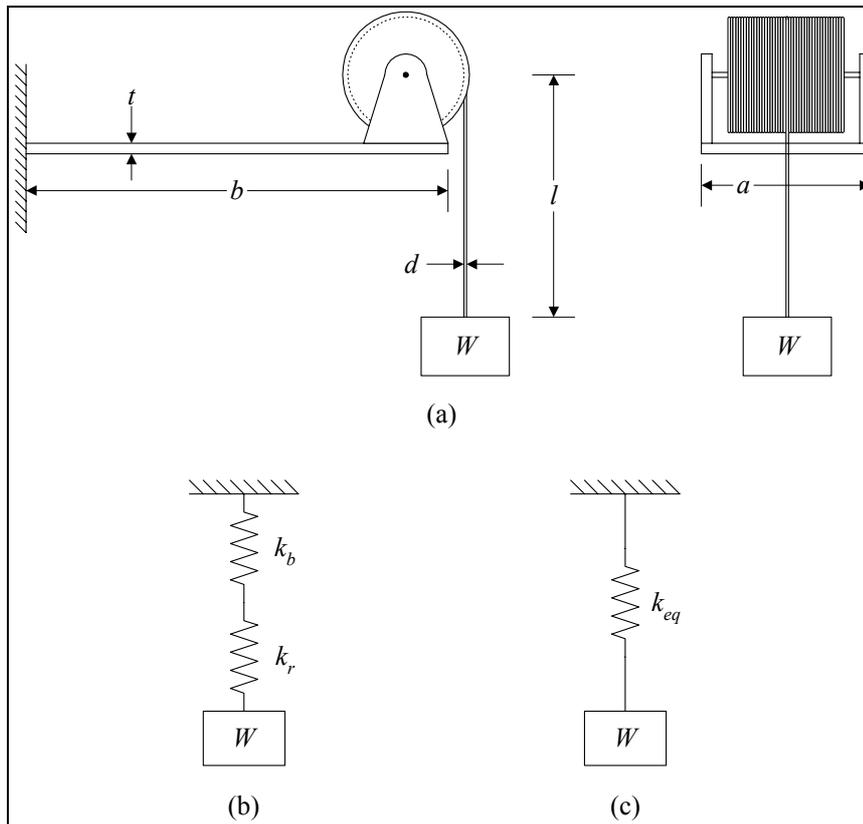


Figura 2.6 - Sistema de elevação.

$$\theta = 35,061^\circ$$

$$l_1 = 12,306 \text{ m}$$

A energia potencial total U armazenada nas molas é obtida por

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 = \frac{1}{2} k_1 [x \cos(90^\circ - \theta)]^2 + \frac{1}{2} k_2 (x \cos 45^\circ)^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left[k_1 (\cos(90^\circ - \theta))^2 + k_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] x^2 \quad (c)$$

onde

$$k_1 = \frac{E_1 A_1}{l_1} = \frac{2,07 \times 10^{11} \times 0,1 \times 10^{-3}}{12,306} = 1,682 \times 10^6 \text{ N/m} \quad (d)$$

e

$$k_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2} = \frac{2,07 \times 10^{11} \times 2,5 \times 10^{-3}}{10} = 51,750 \times 10^6 \text{ N/m} \quad (e)$$

Como a mola equivalente na direção vertical sofre uma deformação x , a energia potencial desta mola equivalente é dada por

$$U_{eq} = \frac{1}{2} k_{eq} x^2 \quad (f)$$

Fazendo $U = U_{eq}$, das expressões (c) e (f), utilizando os resultados de (d) e (e), obtém-se a constante de mola equivalente como

$$k_{eq} = (\cos(90^\circ - \theta))^2 k_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 k_2 = (\cos(90^\circ - 35,061^\circ))^2 \times 1,682 \times 10^6 + \frac{1}{2} \times 51,750 \times 10^6$$

$$k_{eq} = 26,430 \times 10^6 \text{ N/m}$$

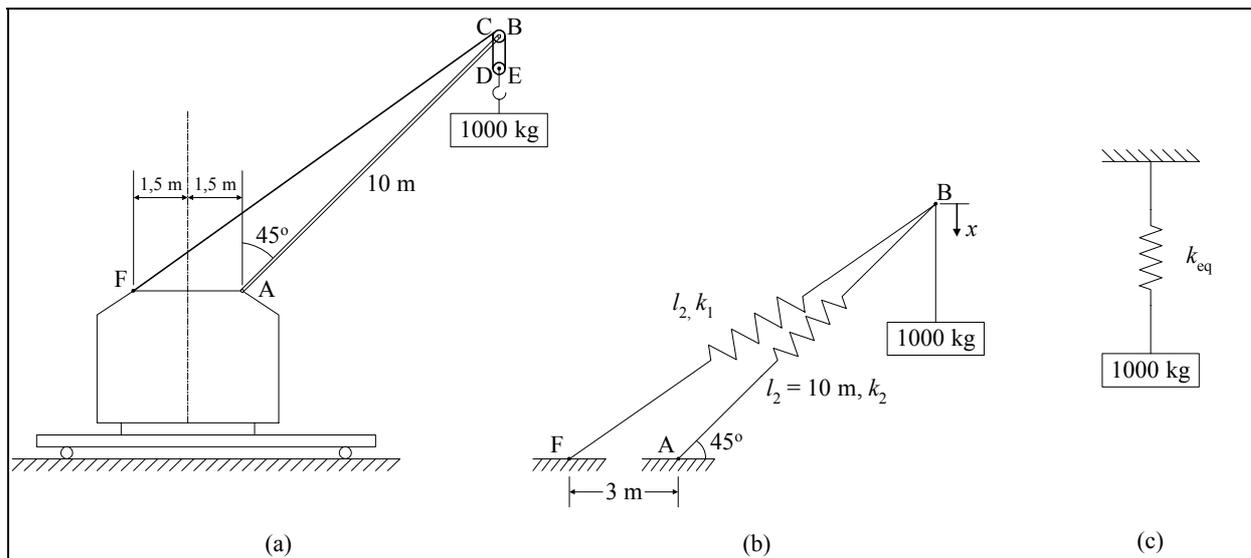


Figura 2.7 - Guindaste com carga.

2.2.1.2 - Elemento amortecedor

O elemento que relaciona forças com velocidades é conhecido genericamente como **amortecedor**. O amortecedor é constituído por um pistão montado com folga dentro de um cilindro cheio de um líquido viscoso (óleo, água, etc.), de forma que o fluido possa passar através do pistão. A Fig. 2.8a apresenta um esquema deste elemento. Assume-se também que o amortecedor não possui massa, de forma que a força F_d , aplicada em uma de suas extremidades possa ser balanceada por uma outra força de mesma magnitude e sentido contrário, aplicada na outra extremidade. Se estas forças F_d , causam um cisalhamento suave no fluido viscoso, a curva F_d versus $\dot{x}_2 - \dot{x}_1$ será aproximadamente linear, como mostra a Fig. 2.8b. A constante de proporcionalidade c , que é a inclinação da curva, é chamada de **coeficiente de amortecimento viscoso**. As unidades de c no SI são **newton-segundo por metro (N.s/m)**.

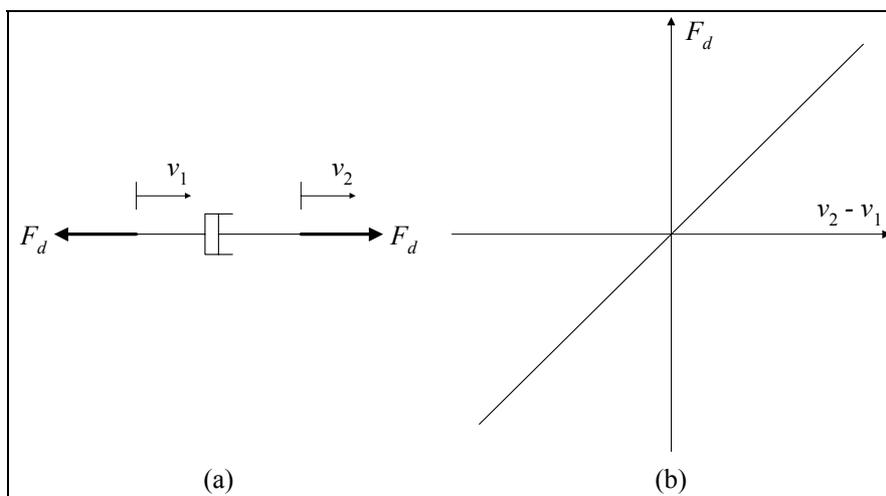


Figura 2.8 - Elemento amortecedor.

A relação entre força e velocidade é então, expressa por

$$F_d = c(v_2 - v_1) \tag{2.14}$$

O amortecedor tem como função física em um sistema vibratório, representar a capacidade que o sistema possui de dissipar energia.

2.2.1.3 - Elemento massa

O elemento que relaciona forças com acelerações é o que representa a inércia do sistema, sendo conhecido como **massa**. De acordo com o que estabelece a Segunda Lei do Movimento de Newton, a força F_i é proporcional à aceleração a quando medidos no mesmo referencial e a constante de proporcionalidade é m (Fig. 2.9). A unidade de massa é básica no SI: **kilograma (kg)**.

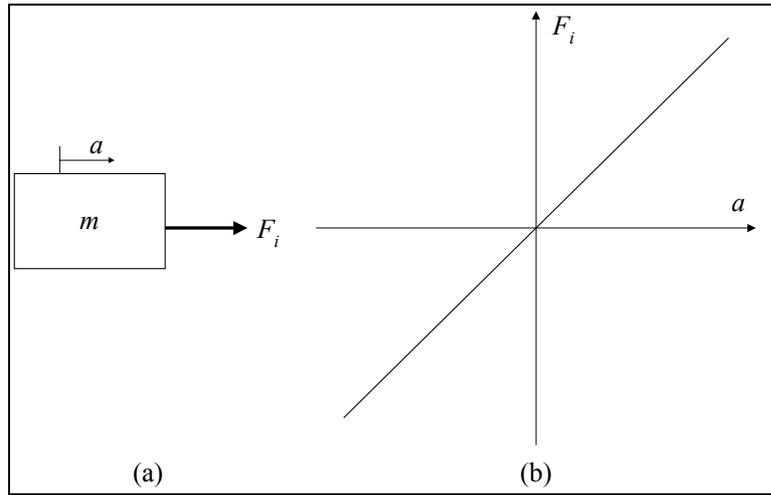


Figura 2.9 - Elemento massa.

O elemento massa é aquele que representa a capacidade física do sistema em armazenar energia cinética. A vibração é o fenômeno físico que ocorre com a troca sistemática de energias cinética e potencial entre a massa e mola. Neste processo o amortecimento responde pela energia que é dissipada.

Exemplo 2.3 - Um mecanismo came-seguidor, mostrado na Fig. 2.10, é utilizado para converter movimento de rotação de um eixo no movimento alternativo de uma válvula. O sistema consiste de uma haste de massa m_p , um balancim de massa m_r e momento de inércia J_r em relação ao seu centro de gravidade C.G., uma válvula de massa m_v , e uma mola de massa desprezível. Determinar a massa equivalente m_{eq} deste sistema came-seguidor assumindo a localização de m_{eq} como (a) ponto A, (b) ponto B. O deslocamento linear da haste é x_p e da válvula é x_v .

Solução: Devido ao deslocamento vertical da haste, x_p , o balancim gira um ângulo $\theta_r = x_p/l_1$ em relação ao ponto de pivotamento, a válvula se move para baixo $x_v = \theta_r l_2 = x_p l_2/l_1$ e o C.G. do balancim se move para baixo $x_r = \theta_r l_3 = x_p l_3/l_1$. A energia cinética do sistema é igual à soma das energias cinéticas de cada elemento

$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{x}_r^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_r^2 \tag{a}$$

onde \dot{x}_p , \dot{x}_r e \dot{x}_v são as velocidades lineares da haste, C.G. do balancim e da válvula, respectivamente, e $\dot{\theta}_r$ é a velocidade angular do balancim.

(a) Se m_{eq} é a massa equivalente do sistema, localizada no ponto A, com $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_p$, a energia cinética total do sistema equivalente T_{eq} é dada por

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_p^2 \tag{b}$$

Como

$$\dot{x}_p = \dot{x}_{eq}, \quad \dot{x}_v = \frac{\dot{x}_{eq} l_2}{l_1}, \quad \dot{x}_r = \frac{\dot{x}_{eq} l_3}{l_1}, \quad \text{e} \quad \dot{\theta}_r = \frac{\dot{x}_{eq}}{l_1} \tag{c}$$

igualando as expressões (a) e (b) resulta

$$m_{eq} = m_p + \frac{J_r}{l_1^2} + m_v \frac{l_2^2}{l_1^2} + m_r \frac{l_3^2}{l_1^2} \tag{d}$$

(b) Da mesma forma, se a massa equivalente está localizada no ponto B, $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_v$, e a expressão (b) se transforma em

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_v^2 \tag{e}$$

e igualando (a) com (e) resulta

$$m_{eq} = m_v + \frac{J_r}{l_2^2} + m_p \frac{l_1^2}{l_2^2} + m_r \frac{l_3^2}{l_2^2}$$

(f)

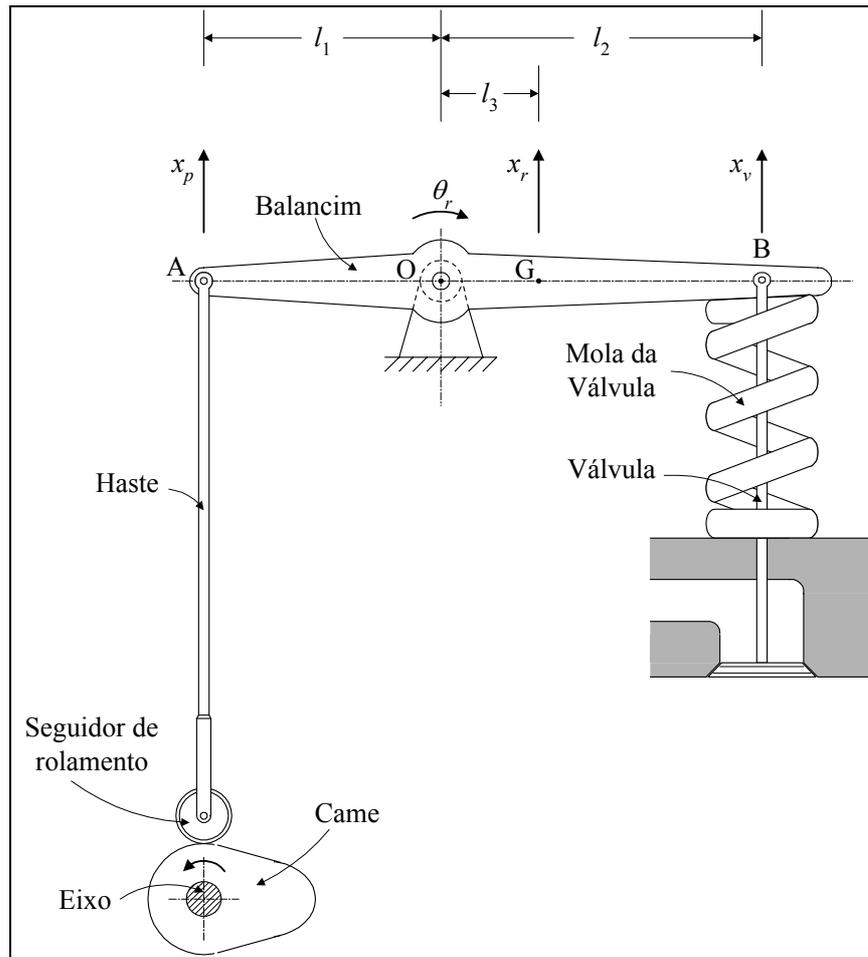


Figura 2.10 - Sistema came-seguidor

Exemplo 2.4 - Determinar a massa efetiva de uma mola de massa total m_s .

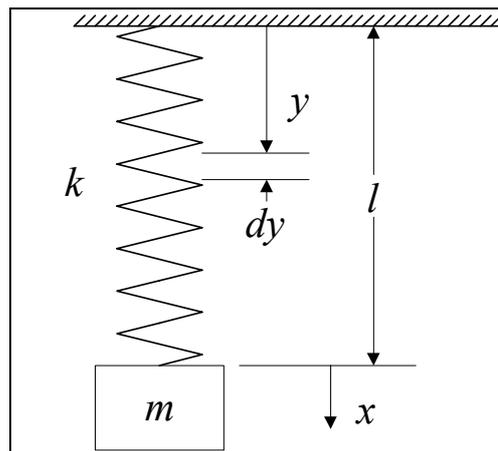


Figura 2.11 - Massa efetiva da mola.

Solução: Sendo \dot{x} a velocidade da massa concentrada m , a velocidade de um elemento da mola, localizado a uma distância y de sua extremidade fixa, varia com y . Supondo que esta variação é linear, a mesma pode ser expressa na forma

$$\dot{y} = \dot{x} \frac{y}{l}$$

(a)

Se a massa de um elemento de comprimento dy é $dm = \frac{m_s}{l} dy$, a energia cinética total da mola pode ser obtida por integração

$$T_{mola} = \frac{1}{2} \int_0^{\dot{x} \frac{y}{l}} \left(\dot{x} \frac{y}{l} \right)^2 \frac{m_s}{l} dy = \frac{1}{2} \frac{m_s}{3} \dot{x}^2 \quad (b)$$

Se a energia cinética equivalente é dada pela expressão (b) do exemplo 2.3, e $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$, comparando com a expressão (b) deste exemplo, a massa efetiva (ou equivalente) da mola é

$$m_{eff} = \frac{m_s}{3} \quad (c)$$

Muitas vezes, quando existem molas de massa considerável no sistema mecânico estudado, utiliza-se a expressão (c) para incluir o efeito da massa da mola.

2.2.2 - Modelo Matemático

A partir do estabelecimento do modelo físico, são utilizados os princípios da dinâmica para determinar as equações diferenciais do movimento. Estas são geralmente na forma de um conjunto de equações diferenciais ordinárias para sistemas discretos e equações diferenciais parciais para sistemas contínuos. As equações podem ser lineares ou não lineares, dependendo do comportamento dos componentes do sistema. Entre os métodos utilizados para determinar as equações do movimento, os mais freqüentemente encontrados são a 2ª Lei de Newton, o Princípio de d'Alembert e as Equações de Lagrange (Princípio da Conservação da Energia).

Dependendo da natureza do problema, uma determinada técnica deverá ser usada para resolver as equações do movimento. As técnicas mais freqüentemente utilizadas são as seguintes: métodos de solução de equações diferenciais, método da Transformada de Laplace, métodos matriciais e métodos numéricos.

A solução das equações do movimento apresenta os deslocamentos, velocidades e acelerações das várias massas do sistema. Estes resultados devem ser interpretados segundo o propósito da análise que está sendo realizada e as possíveis implicações dos resultados. É nesta etapa que se inclui, por exemplo, o diagnóstico de vibrações em máquinas ou equipamentos industriais. A comparação entre as características das vibrações medidas com as soluções das equações diferenciais permite importantes conclusões sobre as causas das vibrações. Nesta etapa a utilização das Transformadas de Fourier é fundamental para a identificação de características nas vibrações medidas.

2.3 - Vibrações livres de sistemas não amortecidos

2.3.1 – Equações de movimento

A Fig. 2.12a mostra um modelo simples de um sistema de um grau de liberdade sem amortecimento, o conhecido sistema massa-mola.

Aplicando a Segunda Lei de Newton, pode-se construir o diagrama de corpo livre da massa m , mostrado na Fig. 2.12b. A equação do movimento é então

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_{est}) + mg$$

pela condição de equilíbrio estático quando o movimento não existe, sabe-se que $mg = k\delta_{est}$, podendo-se escrever a equação diferencial do movimento em sua forma conhecida

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.15)$$

A mesma equação pode ser obtida utilizando o Princípio da Conservação da Energia. Como o sistema não possui amortecimento, toda a energia concedida inicialmente permanece invariável durante o tempo em que acontece o movimento. Isto é expresso por $T + U = E = constante$ onde T é a *energia cinética* e U é a *energia potencial* associadas ao movimento. A consequência matemática da conservação da energia é

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad (2.16)$$

A energia cinética é armazenada pela massa, dependendo da velocidade, sendo dada por $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$, enquanto que a energia potencial é armazenada pela mola, na forma de deformação, sendo $U = \frac{1}{2} kx^2$. Introduzindo estes termos na equação 2.16 tem-se

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

resultando na mesma equação 2.15.

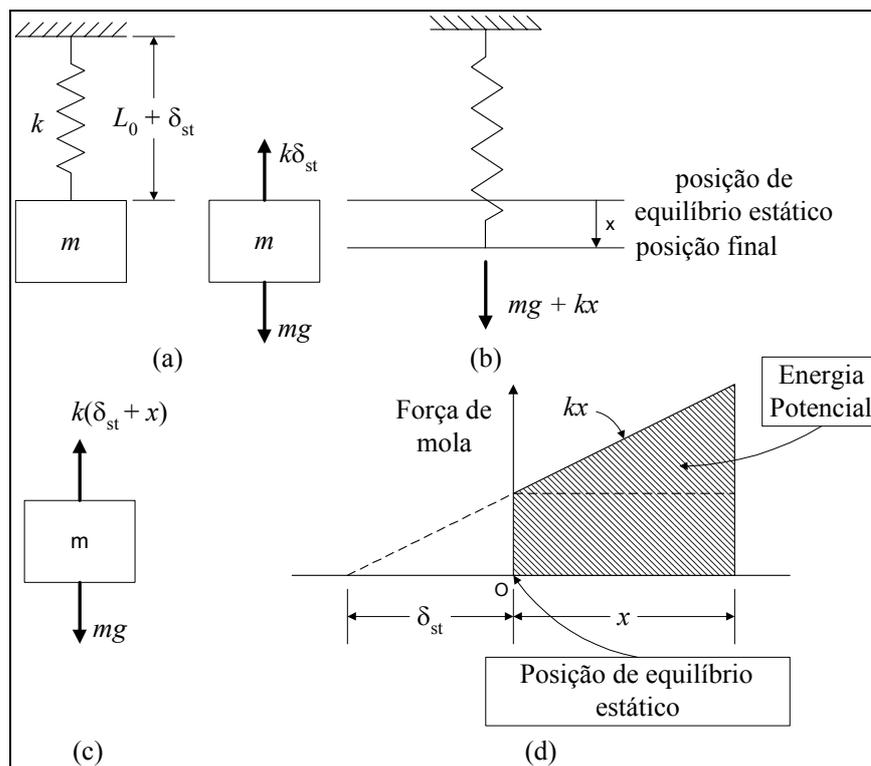


Figura 2.12 - Sistema massa-mola em posição vertical

A equação 2.15 é uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem (derivada de maior ordem), linear (todos os termos estão linearmente relacionados com x e suas derivadas), de coeficientes constantes (m e k não variam com o tempo) e homogênea (o termo independente é igual a 0). A solução desta equação é dada por

$$x(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t \quad (2.17)$$

onde A_1 e A_2 são constantes de integração.

Derivando duas vezes (2.17) e substituindo em (2.15) encontra-se

$$(k - m\omega_n^2)(A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t) = 0 \quad (2.18)$$

Para que a equação (2.18) seja satisfeita, é necessário que

$$(k - m\omega_n^2) = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (2.19)$$

A solução (2.17) tem as mesmas características daquela obtida em Resistência dos Materiais, para a equação da linha elástica. Lá o problema é espacial (variável independente é a posição) conhecido como *problema do contorno*, e as constantes A_1 e A_2 são obtidas através de equações auxiliares geradas pelas *condições de contorno* associadas ao problema em estudo. No caso presente o problema se apresenta no domínio do tempo e é conhecido como *problema do valor inicial* e as constantes A_1 e A_2 dependem das condições iniciais do movimento. Se os valores iniciais do deslocamento e da velocidade (que representam a energia total introduzida para gerar o movimento livre), são conhecidos e dados por x_0 e v_0 tem-se

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = A_1 \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 = \omega_n A_2 \end{aligned}$$

de forma que a solução da equação diferencial do movimento se torna

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.20)$$

O movimento representado em (2.20) é um movimento harmônico de frequência igual a ω_n . Esta é a frequência com que o sistema oscila quando está livre sem amortecimento. Por este motivo é chamada de *frequência natural* de oscilação. Esta frequência natural terá muita importância quando se estudar a vibração forçada sendo ela uma das características mais importantes de um sistema do ponto de vista dinâmico.

Tratando-se de uma oscilação harmônica, é importante representar a expressão (2.20) em uma forma mais simples, contendo um seno ou cosseno apenas. Com o auxílio de relações trigonométricas (2.20) pode ser escrita como

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_n t + \phi) \quad (2.21)$$

onde

$$X_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{e}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{x_0 \omega_n}\right)$$

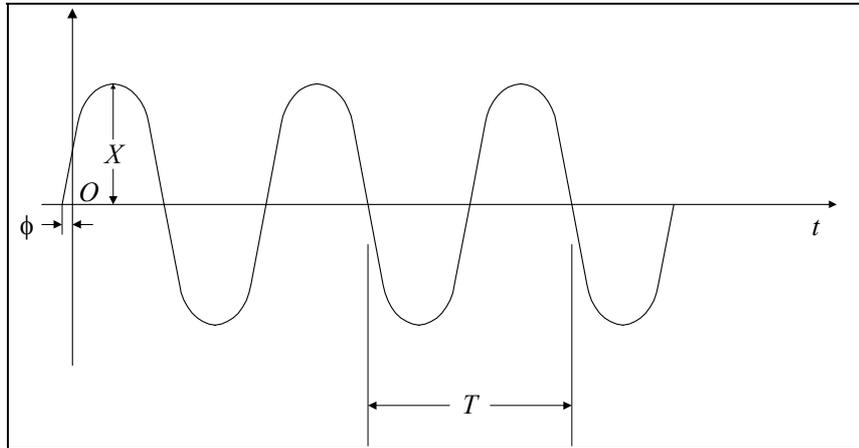


Figura 2.13 - Vibração livre sem amortecimento (movimento harmônico)

Exemplo 2.5 - Encontrar a frequência natural de vibração na direção vertical do sistema de elevação mostrado na Fig. 2.6a

Solução: O sistema de elevação pode ser idealizado como um sistema de um grau de liberdade com duas molas associadas em série (viga em balanço e corda, são os elementos elásticos), cuja rigidez equivalente é dada por

$$k_{eq} = \frac{k_b k_r}{k_b + k_r} \quad (a)$$

onde k_b é a rigidez da viga em balanço sob flexão e k_r é a rigidez do cabo de aço sob tração.

$$k_b = \frac{3EI}{b^3} = \frac{3E}{b^3} \left(\frac{at^3}{12}\right) = \frac{Eat^3}{4b^3} \quad \text{e}$$

$$k_r = \frac{EA}{l} = \frac{E}{l} \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = \frac{E\pi d^2}{4l}$$

resultando em uma rigidez equivalente

$$k_{eq} = \frac{E}{4} \left(\frac{\pi d^2 at^3}{\pi d^2 b^3 + lat^3}\right)$$

e a frequência natural é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_{eq} g}{P}} = \sqrt{\frac{Eg}{4P} \left(\frac{\pi d^2 at^3}{\pi d^2 b^3 + lat^3}\right)} \quad (b)$$

Exemplo 2.6 - Determinar a frequência natural do sistema de polias mostrado na Fig. 2.14. Assumir que não há atrito entre cabo e polias e as massas das polias e do cabo são desprezíveis.

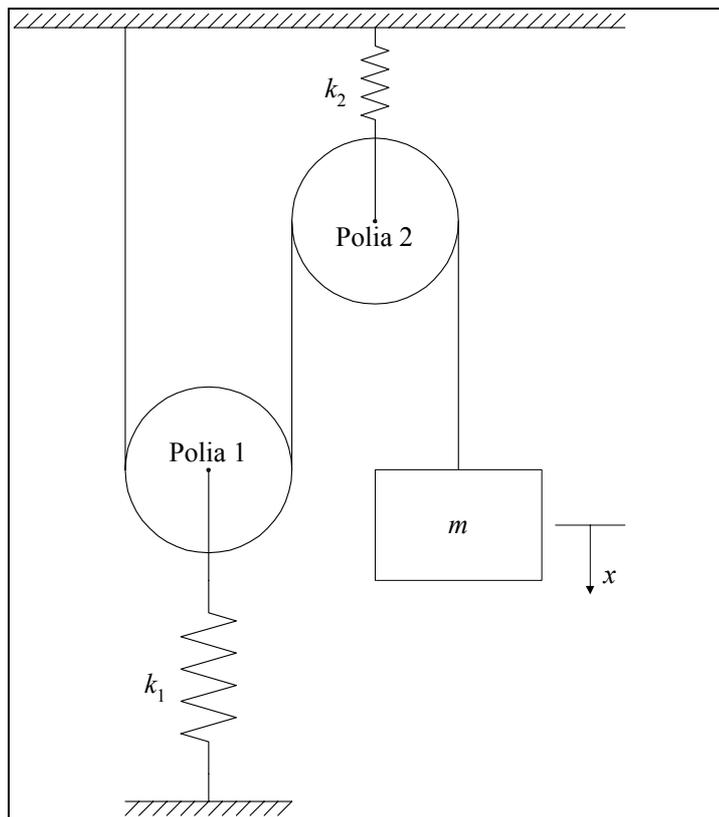


Figura 2.14 - Sistema de elevação com polias.

Solução: Idealizando novamente o sistema como um sistema de um grau de liberdade, a frequência natural também pode ser obtida usando o conceito de rigidez equivalente. Como não há atrito entre polias e cabo e as polias não possuem massa, a tensão na corda é constante e igual ao peso P da massa m . Então a força que atua na polia 1, puxando-a para cima é $2P$, e a força que atua na polia 2, puxando-a para baixo também é $2P$. O centro da polia 1 se desloca $2P/k_1$ para cima, e o centro da polia 2 se desloca $2P/k_2$, para baixo. O deslocamento total da massa m é

$$2\left(\frac{2P}{k_1} + \frac{2P}{k_2}\right)$$

A constante de mola equivalente do sistema é obtida considerando $\frac{\text{peso da massa}}{\text{constante de mola equivalente}} =$ deslocamento da massa, portanto

$$\frac{P}{k_{eq}} = 4P\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{4P(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} \quad \text{e}$$

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)}$$

Se a equação do movimento da massa é escrita como

$$m\ddot{x} + k_{eq}x = 0$$

então a frequência natural é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{4m(k_1 + k_2)}} \quad \text{rad / seg} \quad \text{ou} \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} \quad \text{Hz (ciclos / seg)}$$

Exemplo 2.7 – Um rolo compactador de solo consiste de um cilindro de massa m e raio r , que está conectado a um trator por uma mola de constante k como mostra a Fig. 2.15. Encontrar a equação diferencial do movimento. Assumir que o rolo está livre para rolar sobre a superfície horizontal, sem deslizamento.

Solução: Aplicando a 2ª Lei de Newton ao movimento do cilindro, usando como coordenada o movimento do centro de massa do mesmo,

$$\sum F = m\ddot{x} \tag{a}$$

ou

$$m\ddot{x} = -kx + F_f \tag{b}$$

onde F_f é a força de atrito, ainda desconhecida.

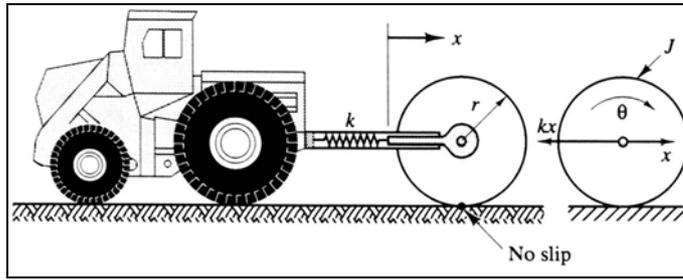


Figura 2.15 – Rolo compactador de solo.

Usando a equação, $\sum M = J_o\theta$

$$J_o\ddot{\theta} = -F_f r \tag{c}$$

ou

$$\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{\ddot{x}}{r}\right) = -F_f r \tag{d}$$

e, portando, $F_f = -\frac{1}{2}m\ddot{x}$. Substitui-se esta expressão para F_f na equação das forças para obter

$$m\ddot{x} = -kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} \tag{e}$$

ou

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0 \tag{f}$$

2.3.2 - Método da energia de Rayleigh

Conforme foi dito no capítulo introdutório, uma das mais importantes contribuições de Lord Rayleigh no campo das vibrações foi o método apresentado para determinação da frequência natural do sistema de um grau de liberdade. Mais tarde Ritz estendeu o método para determinação da primeira frequência natural de um sistema de mais de um grau de liberdade. O Método de Rayleigh se fundamenta no Princípio da Conservação da Energia, se aplicando, portanto, apenas a sistemas conservativos (sem amortecimento). Como a energia total E é constante, a soma das energias cinética e potencial em dois instantes de tempo quaisquer são iguais

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = E \tag{2.22}$$

onde T_1 e U_1 são as energias cinética e potencial no tempo 1 e T_2 e U_2 são as energias cinética e potencial no tempo 2.

Estabelecendo-se a posição de equilíbrio estático como a posição referencial de energia potencial (a energia potencial depende do referencial, que pode ser escolhido arbitrariamente) e o tempo 1 for o tempo em que o sistema passa por esta posição, então $U_1 = 0$ e, como a energia total é constante e igual à soma das energias cinética e potencial, a energia cinética neste tempo deve ser máxima, ou $T_1 = T_{max}$. Por outro lado, ao se escolher o tempo 2 como o tempo em que o sistema atinge seu máximo deslocamento, isto produz uma energia potencial máxima $U_2 = U_{max}$ e, como o movimento é oscilatório, a velocidade neste mesmo tempo é nula e $T_2 = 0$. Utilizando a expressão (2.22), isto se traduz em

$$T_{max} = U_{max} \tag{2.23}$$

que é a expressão fundamental do Método de Rayleigh.

Exemplo 2.8 – Resolver o problema do exemplo 2.7 utilizando o Método de Energia.

Solução: Energia cinética do movimento de translação do centro de massa do rolo

$$T_t = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{a}$$

Energia cinética do movimento de rotação do rolo

$$T_r = \frac{1}{2} J_o \dot{\phi}^2 \quad (b)$$

onde o momento de inércia do rolo é

$$J_o = \frac{1}{2} m r^2 \quad (c)$$

Pela condição de rolamento sem deslizamento

$$r\phi = x \quad \text{ou} \quad r\dot{\phi} = \dot{x} \quad (d)$$

de forma que a energia cinética total é

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \left(\frac{3}{4} \right) m \dot{x}^2 \quad (e)$$

A energia potencial se concentra na mola, sendo

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (f)$$

Aplicando o Princípio da Conservação da Energia

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \left(\frac{3}{2} m \ddot{x} + kx \right) = 0 \quad (g)$$

Simplificando, chega-se à equação

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + kx = 0 \quad (h)$$

que é idêntica à eq. (f) do Exemplo 2.7.

Exemplo 2.9 – Estruturas compostas. Determinar a frequência natural da vibração vertical de uma massa ligada a uma estrutura flexível como mostrado na Fig. 2.16.

Solução: A estrutura da Fig. 2.16 é considerada como duas molas associadas em série. O modelo é mostrado na Fig. 2.16a. Para uma viba bi-apoiadaa constante de mola para a deflexão lateral no meio é

$$k = \frac{48EI}{L^3} \quad (a)$$

Passo 1: O sistema possui um grau de liberdade. Seleciona-se a coordenada x .

Passo 2: Assume-se que a massa é deslocada x . As forças aplicadas são mostradas na Fig. 2.16d. F é ainda desconhecida. A compatibilidade dos deslocamentos exige que

$$\delta_{12} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad \delta_1 = \frac{F/2}{k_1}, \quad \delta_2 = \frac{F/2}{k_2}, \quad \delta_3 = \frac{F}{k_3} \quad (b)$$

$$x = \delta_{12} + \delta_3 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \delta_3 = \frac{F}{4k_1} + \frac{F}{4k_2} + \frac{F}{k_3} = F \left(\frac{1}{4k_1} + \frac{1}{4k_2} + \frac{1}{k_3} \right)$$

Então

$$F = \frac{x}{1/4k_1 + 1/4k_2 + 1/k_3} \quad (c)$$

Passo 3: A 2ª Lei de Newton estabelece

$$m\ddot{x} = -F = \frac{-x}{1/4k_1 + 1/4k_2 + 1/k_3} \quad (d)$$

$$m\ddot{x} + \frac{1}{1/4k_1 + 1/4k_2 + 1/k_3} x = 0$$

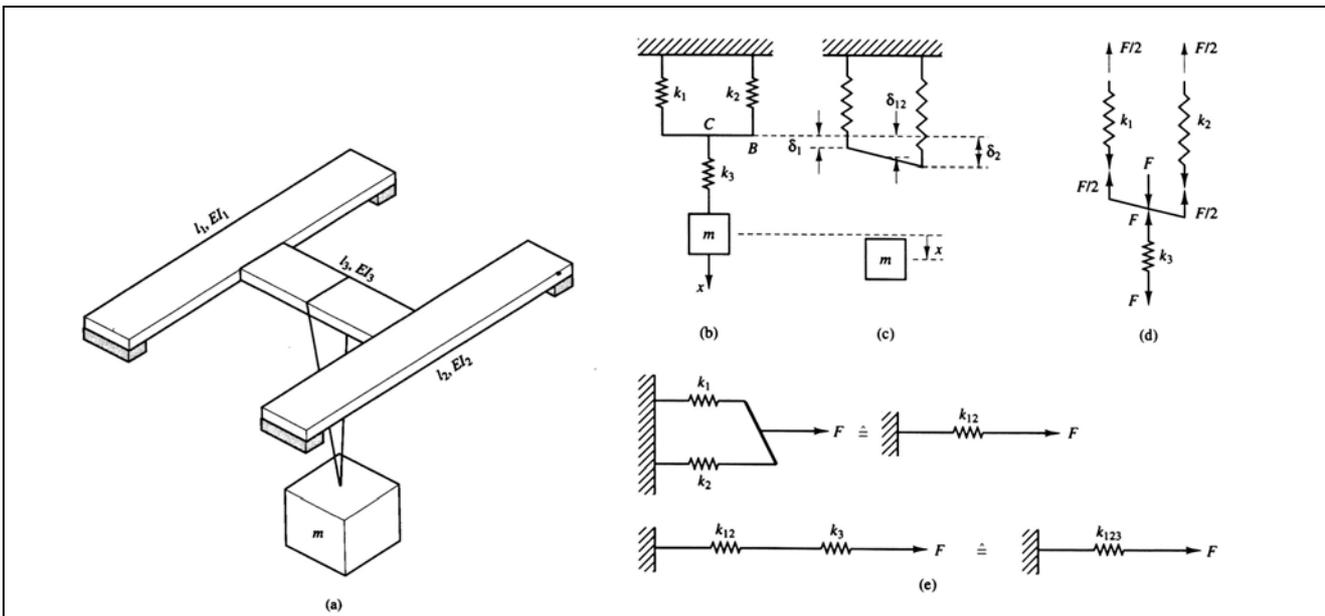


Figura 2.16 – Estrutura composta.

Passo 4: A frequência natural é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\frac{1/4k_1 + 1/4k_2 + 1/k_3}{m}}} \tag{e}$$

Exemplo 2.10 – Uma viga engastada, de aço, com comprimento igual a 1 m possui uma seção transversal retangular de 0,01 x 0,12 m². Uma massa de 100 kg é anexada à sua extremidade livre como mostra a Fig. 2.17. Determinar a frequência natural do sistema para vibração vertical.

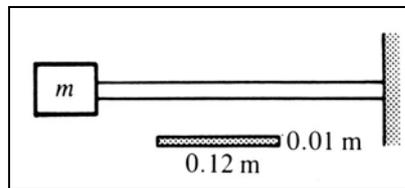


Figura 2.17 – Viga engastada.

Solução: Assume-se que a massa da viga é pequena. $m_{viga} = 7800 \times 1 \times 0,01 \times 0,12 = 9,36$ kg, mas se sabe que a sua massa efetiva é cerca de 1/3 deste valor, 3,12 kg, o que representa 3,12 % da massa colocada na extremidade. A deflexão na extremidade livre da viga engastada, devida a uma força lateral P ali aplicada é $\delta = PL^3/3EI$. Portanto, para pequenas oscilações, a constante de mola é $k = P/\delta = 3EI/L^3$.

O momento de inércia da viga é $I = bh^3/12 = 0,12 \times 0,01^3/12 = 10^{-8} \text{ m}^4$, e o módulo de elasticidade do aço é $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. Portanto, $k = 3 \times 2,1 \times 10^{11} \times 10^{-8}/1^3 = 6300 \text{ N/m}$.

A equação do movimento livre não amortecido é

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{a}$$

Se a massa da viga não for considerada a frequência natural será

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6300}{100}} = 7,94 \text{ rad/s} \tag{b}$$

Se a massa efetiva da viga (1/3) for acrescentada, a frequência natural torna-se

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{6300}{100 + 3,12}} = 7,82 \text{ rad/s} \tag{c}$$

A diferença de 0,12 rad/s equivale a 1,51 % da frequência natural, correspondendo a uma diferença de 9,36 % na massa total. Isto demonstra a importância em se considerar a massa efetiva da mola.

Exemplo 2.11 – A corda mostrada na Figura 2.18 está sob uma tensão T , que permanece constante para pequenos deslocamentos. Determinar a frequência natural da vibração vertical da massa m considerando pequenas oscilações. Despreze os efeitos da gravidade e a massa da mola.

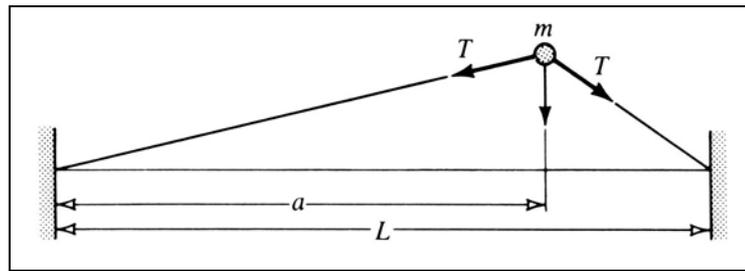


Figura 2.18 – Massa suportada por uma corda tensionada.

Solução: Assumir que a massa está deslocada x na direção vertical. A tensão na corda é a força de restauração. Como a tensão é constante, as componentes verticais da tensão sobre a massa resultam em $-T[x/a + x/(L-a)]$. Aplicando a 2ª Lei de Newton, a equação do movimento é

$$m\ddot{x} + T\left(\frac{x}{a} + \frac{x}{L-a}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + \left[\frac{TL}{a(L-a)}\right]x = 0 \quad (a)$$

e

$$\omega_n = \sqrt{\frac{TL}{ma(L-a)}} \quad (b)$$

Exemplo 2.12 – Um cilindro sólido de raio r está imerso parcialmente em água destilada como ilustra a Fig. 2.19. Determinar a frequência natural de oscilação do cilindro na direção vertical, assumindo que permanece na posição vertical. As densidades do cilindro e da água são ρ_c e ρ_w .

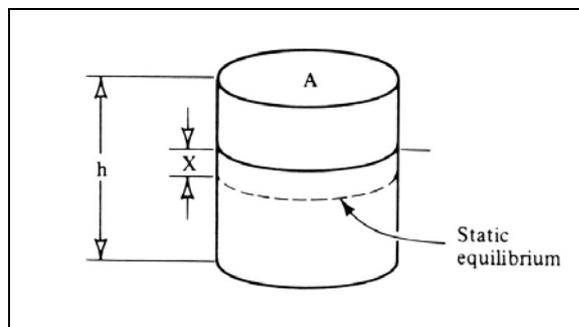


Figura 2.19 – Vibração de corpos flutuantes.

Solução: O deslocamento vertical do cilindro medido a partir de sua posição de equilíbrio é x . O peso da água deslocada (empuxo) é $Ag\rho_w x$. Esta é força restauradora, de acordo com o Princípio de Arquimedes. A massa do cilindro é $Ah\rho_c$. Da 2ª Lei de Newton, a equação do movimento é

$$\rho_c Ah\ddot{x} + Ag\rho_w x = 0 \quad (a)$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{g\rho_w}{\rho_c h} x = 0 \quad (b)$$

portanto

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g\rho_w}{\rho_c h}} \quad (c)$$

Como parte da água se move junto com o cilindro, a frequência natural real será um pouco menor. A massa de água acrescida é:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi \rho d^3}{12} &\rightarrow \text{esfera} \\ \frac{\rho d^3}{3} &\rightarrow \text{disco} \\ \frac{\pi \rho w^2 L}{4} &\rightarrow \text{placa com forma retangular } wL \\ \frac{\pi \rho d^2 L}{4} &\rightarrow \text{cilindro movendo-se perpendicularmente ao seu eixo longitudinal} \end{aligned} \right\} \text{movendo-se perpendicularmente à superfície plana}$$

Exemplo 2.13– Um corpo de massa m_1 está suportado por uma mola de rigidez k (Fig. 2.20). Uma massa m cai de um altura h sobre o corpo ocorrendo um impacto perfeitamente plástico. Determinar a expressão da vibração resultante e a frequência natural do sistema após o impacto.

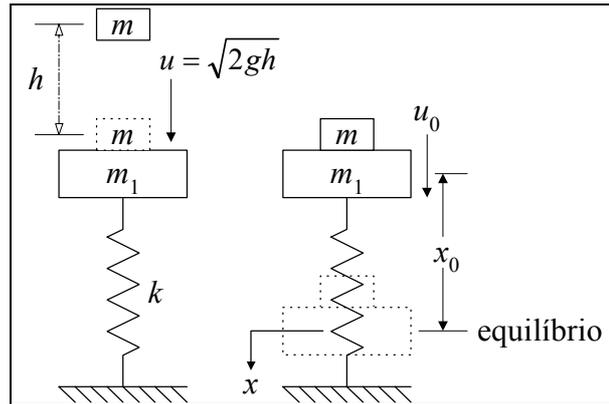


Figura 2.20 – Vibração devida ao impacto.

Solução: Em primeiro lugar determina-se a velocidade da massa m no momento do impacto. A seguir, utilizando o princípio da conservação da quantidade de movimento, calcula-se a velocidade do conjunto após o impacto, que é a velocidade inicial do movimento das duas massas se vibrando como um corpo rígido.

Quando a massa m atinge o corpo m_1 , possui velocidade $u = \sqrt{2gh}$. O princípio da conservação da quantidade de movimento estabelece que $mu = (m_1 + m)u_0$ onde u_0 é a velocidade das duas massas após o impacto.

Neste instante o sistema não estará na sua posição de equilíbrio estático. Se a massa m_1 for carregada com uma carga adicional mg , a posição de equilíbrio estático estaria $\delta_0 = mg/k$ abaixo da posição do impacto. Se o movimento é medido a partir desta posição (impacto), as condições iniciais são

$$x_0 = \frac{-mg}{k}, \quad u_0 = \sqrt{2gh} \left(\frac{m}{m + m_1} \right) \tag{a}$$

A equação do movimento é similar à Eq. (2.15)

$$(m + m_1)\ddot{x} + kx = 0 \tag{b}$$

com

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + m_1}} \tag{c}$$

A solução, em função das condições iniciais, é dada pela Eq. (2.20), resultando em

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{u_0}{\omega_n} \sin \omega_n t = m \sqrt{\frac{2gh}{k(m + m_1)}} \sin \omega_n t - \frac{mg}{k} \cos \omega_n t$$

2.4 - Vibração Livre de Sistemas com Amortecimento Viscoso

O amortecimento representa a capacidade do sistema em dissipar energia. Como modelo mais simples de amortecimento se apresenta o **amortecimento viscoso**, assim chamado por representar a força dissipativa proporcionada por um fluido viscoso. Esta força tem como característica principal ser proporcional à velocidade relativa entre as superfícies em movimento quando existe um fluido separando-as. Esta proporcionalidade garante que a equação

diferencial do movimento não perderá nenhuma de suas características enunciadas na seção 2.3.1. A força de amortecimento viscoso F_a tem como expressão

$$F_a = -c\dot{x} \quad (2.24)$$

onde c é a chamada *constante de amortecimento*.

2.4.1 - Equação do movimento

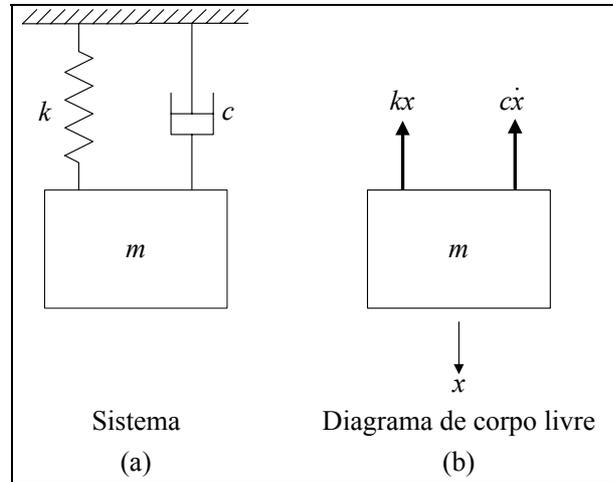


Figura 2.21 - Sistema de um grau de liberdade com amortecedor viscoso

A Fig. 2.21a mostra o esquema de um sistema de um grau de liberdade com amortecimento. Se a força de amortecimento for de natureza viscosa, é igual à expressão (2.24), o diagrama de corpo livre da Fig. 2.21b, ao se aplicar a 2ª Lei de Newton, permite que se escreva a equação

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

que pode ser escrita na forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.25)$$

A solução da equação (2.25) tem forma $x(t) = Ce^{st}$ que, introduzida na equação, resulta em

$$(ms^2 + cs + k)Ce^{st} = 0$$

que tem solução não trivial quando a equação característica

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.26)$$

for satisfeita. Isto só é possível se as raízes forem

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.27)$$

Como as duas raízes satisfazem a equação diferencial (2.25), a solução resultante será uma combinação linear das mesmas na forma

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (2.28)$$

2.4.2 - Sistemas sub-amortecido, criticamente amortecido e super-amortecido.

A forma funcional de (2.28) depende fundamentalmente da natureza das raízes (2.27): complexas ou reais. Para facilitar a notação, antes de estudar a influência da natureza das raízes na forma funcional, deve-se definir alguns parâmetros auxiliares.

Constante de Amortecimento Crítico

A constante de amortecimento crítico c_c é definida como o valor de c que faz com que o discriminante Δ da expressão (2.27) se anule. Isto porque, é do sinal deste discriminante que depende a natureza das raízes: $\Delta > 0$ implica em raízes reais enquanto que para $\Delta < 0$ as raízes formarão um par complexo. $\Delta = 0$, se apresenta como o limite entre estas duas situações distintas. Tem-se então

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

de forma que

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \quad (2.29)$$

Fator de Amortecimento

A constante de amortecimento c dá uma indicação da relação entre a força de amortecimento e a velocidade relativa entre as partes em movimento. Ela, porém não proporciona uma visão da *quantidade de amortecimento* que atua sobre o sistema real, uma vez que uma força de amortecimento pode ser grande para um sistema e pequena para outro, dependendo, fundamentalmente das massas envolvidas e da rigidez. Define-se, então o *fator de amortecimento* que é uma quantidade adimensional e não depende da ordem de grandeza dos parâmetros do sistema, indicando expressamente o quanto o sistema está sendo amortecido. O fator de amortecimento é definido como a relação entre a constante de amortecimento do sistema e a constante de amortecimento crítica

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (2.30)$$

Com o valor de c_c dado na expressão (2.29) tem-se que

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (2.31)$$

Considerando que $\omega_n^2 = k/m$, com a expressão (2.31), as raízes (2.27) podem ser escritas na forma

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (2.32)$$

Introduzindo (2.32) em (2.28), chega-se a

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2.33)$$

A expressão (2.33) pode ser considerada como a expressão geral para o movimento vibratório de um sistema de um grau de liberdade. Pode-se se mostrar facilmente que, para $\zeta = 0$ esta expressão se transforma em (2.17), que representa o movimento de um sistema de um grau de liberdade sem amortecimento.

A forma do movimento representado por (2.33) depende expressamente dos expoentes presentes (ou da natureza das raízes (2.32) como já foi dito antes). A seguir serão apresentadas as possibilidades de movimento em função da natureza destes expoentes (reais, complexos ou nulos). E, como pode ser facilmente averiguado em (2.33), a natureza dos expoentes depende do fator de amortecimento ζ .

Caso 1: Sistema sub-amortecido - $\zeta < 1$

No primeiro caso analisado o sistema possui um fator de amortecimento menor que a unidade, o que significa que sua constante de amortecimento é menor que a constante de amortecimento crítico, como pode ser observado em (2.30). Como consequência tem-se que

$$\zeta - 1 < 0$$

Então (2.33) pode ser escrita na forma

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} \quad (2.34)$$

que, considerando as fórmulas de Euler, $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$, pode ser modificada para

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[(C_1 + C_2) \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + i (C_1 - C_2) \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right] \quad (2.35)$$

e, através das relações trigonométricas $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$, chega-se a

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t - \phi) \quad (2.36)$$

$$\text{com } X = \sqrt{(C_1 + C_2)^2 - (C_1 - C_2)^2} = 2\sqrt{C_1 C_2} \quad \text{e} \quad \phi = \tan^{-1} \left[\frac{i(C_1 - C_2)}{C_1 + C_2} \right].$$

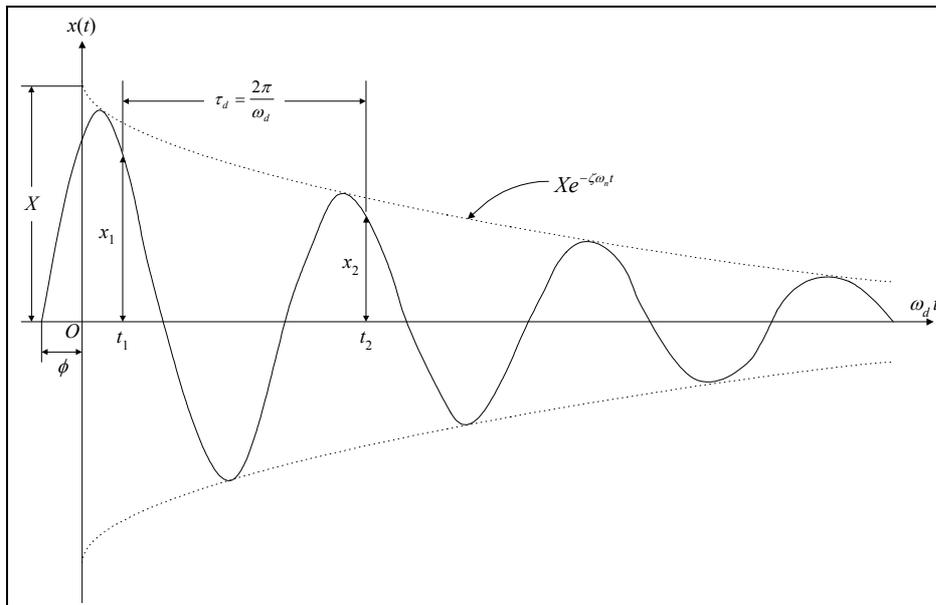


Figura 2.22 - Solução sub-amortecida.

As constantes de integração X e ϕ , são obtidas aplicando-se as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$ diretamente à expressão (2.36), resultando em

$$X = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}\right)^2 + x_0^2} \quad (2.37a)$$

e
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}\right) \quad (2.37b)$$

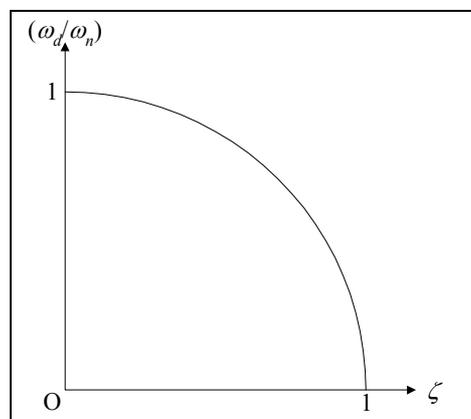


Figura 2.23 - Variação de ω_d com o amortecimento.

A forma do movimento representado pela expressão (2.36) é mostrada na Fig. 2.22. Trata-se de um movimento harmônico com forma $\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi)$, e amplitude decrescente exponencialmente segundo a relação $Xe^{-\zeta\omega_n t}$. Observa-se que o efeito do amortecimento está presente na amplitude decrescente, representando a dissipação da energia vibratória. Para grandes valores de t o termo $Xe^{-\zeta\omega_n t} \rightarrow 0$.

O movimento continua sendo harmônico pois apenas uma frequência está presente. A frequência de oscilação agora não é mais a frequência natural e sim a chamada *frequência da vibração livre amortecida*, dada por

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (2.38)$$

ω_d se aproxima de ω_n para pequenos valores de ζ . A variação de ω_d com ζ está mostrada na Fig. 2.23.

Caso 2 - Sistema Criticamente Amortecido - $\zeta=1$

Quando $\zeta=1$, a constante de amortecimento c é igual à constante de amortecimento crítico c_c , implicando que as raízes dadas em (2.32) são reais e iguais, a saber

$$s_1 = s_2 = -\omega_n \tag{2.39}$$

Para o caso de raízes reais repetidas, a solução da equação diferencial (2.25) assume a forma

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \tag{2.40}$$

Aplicando-se as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$ diretamente à expressão (2.40), as constantes de integração são obtidas como $C_1 = x_0$ e $C_2 = v_0 + \omega_n x_0$, resultando em

$$x(t) = \left[x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t \right] e^{-\omega_n t} \tag{2.41}$$

A Fig. 2.24 mostra o movimento criticamente amortecido, juntamente com os outros tipos de movimentos amortecidos. Em função do termo exponencial negativo o movimento tende a zero com o crescimento do tempo. Como o movimento não é mais harmônico, neste tipo de sistema não ocorrem oscilações completas: a massa retorna rapidamente à sua posição de equilíbrio.

Caso 3 - Sistema Super-Amortecido - $\zeta > 1$

Quando $\zeta > 1$ a constante de amortecimento c é maior que a constante de amortecimento crítico c_c , implicando que as raízes dadas em (2.32) são reais e diferentes, a saber

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n < 0 \tag{2.42}$$

e a solução da equação diferencial retorna à forma dada em (2.33).

Introduzindo-se as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$, em (2.33), determinam-se as constantes de integração, que se tornam

$$C_1 = \frac{x_0 \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + v_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$C_2 = \frac{-x_0 \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - v_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

O movimento super-amortecido também está mostrado na Fig. 2.24 e se pode ver que não é oscilatório. Se pode comparar os três casos descritos acima e concluir que movimento oscilatório só acontece em sistemas sub-amortecidos ($\zeta < 1$). Sistemas criticamente amortecidos e super-amortecidos apresentam como característica principal, o fato de que toda a energia vibratória inicial se dissipa antes que ocorra um ciclo vibratório. Conseqüência: não há vibração. Uma conclusão que se tira da observação da Fig. 2.24 é que o sistema retorna mais rapidamente à posição de equilíbrio quando está criticamente amortecido do que quando está super-amortecido. Portanto, quando se desejar fazer com que um sistema retorne rapidamente, sem vibrar, à sua posição inicial depois de deslocado dela, se deve escolher uma quantidade de amortecimento que torne o sistema criticamente amortecido. Na prática, como vai ser visto mais adiante, valores menores do que o amortecimento crítico ($\zeta = 0.7$) permitem o retorno à posição de equilíbrio mais rapidamente ainda, permitindo-se que ocorra apenas uma oscilação. Este valor é usado em amortecedores de veículos, pois os mesmos, quando submetidos às irregularidades de ruas e estradas, devem retornar o mais rapidamente à sua posição original.

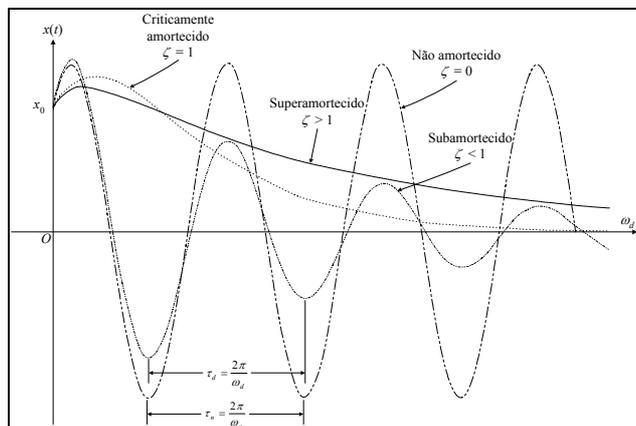


Figura 2.24 - Comparação entre movimentos com diferentes tipos de amortecimento.

2.4.3 - Decremento Logarítmico

Um problema que se apresenta normalmente para quem estuda sistemas vibratórios é estimar o fator de amortecimento ζ . Quando se possui um registro, resultado de uma medição, de um movimento vibratório, é possível observar a queda exponencial da amplitude de vibração com o tempo. O método do decremento logarítmico se fundamenta na comparação entre duas amplitudes, consecutivas ou não, medidas de um movimento vibratório livre amortecido.

A Fig. 2.22 mostra o registro de um movimento vibratório livre, medido de um sistema de um grau de liberdade. Em se tratando de movimento oscilatório, então o sistema é sub-amortecido, e a expressão que descreve o movimento é a (2.36). Se x_1 é o deslocamento medido no tempo t_1 e x_2 é o deslocamento medido no tempo t_2 , a relação entre x_1 e x_2 é

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Xe^{-\zeta\omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi)}{Xe^{-\zeta\omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \phi)} \quad (2.43)$$

Se os dois deslocamentos são medidos em tempos separados por um período inteiro, então $t_2 = t_1 + \tau_d$ com $\tau_d = 2\pi/\omega_d$, de forma que

$$\cos(\omega_d t_2 - \phi) = \cos(2\pi + \omega_d t_1 - \phi) = \cos(\omega_d t_1 - \phi)$$

o que torna (2.43)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1 + \tau_d)}} = \frac{1}{e^{-\zeta\omega_n \tau_d}} = e^{\zeta\omega_n \tau_d} = e^{\zeta\omega_n \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

e o decremento logarítmico é definido então como

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.44)$$

Para sistemas com amortecimento muito baixo ($\zeta \ll 1$), a expressão (2.44) pode ser aproximada para

$$\delta = 2\pi\zeta \quad (2.45)$$

A Fig. 2.25 mostra graficamente a relação entre δ e ζ de onde se pode ver que a curva (2.44) se aproxima da reta descrita por (2.45) quando $\zeta < 0.3$.

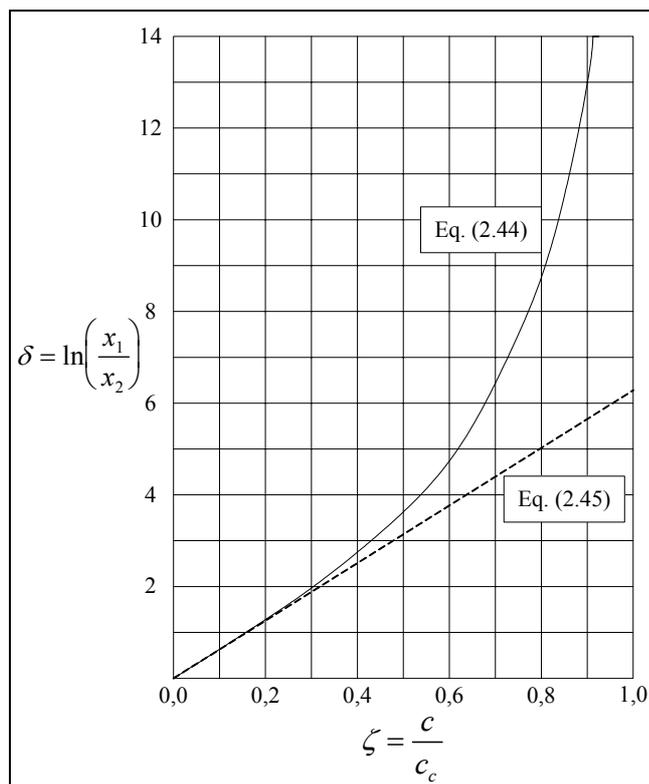


Figura 2.25 - Variação do decremento logarítmico com o amortecimento.

Basicamente, então, o método funciona a partir de duas medidas do movimento, x_1 e x_2 seguindo-se o cálculo do decremento logarítmico δ , por (2.44), e a seguir, o fator de amortecimento ζ é calculado por

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \tag{2.46}$$

Como, em uma grande quantidade de casos, é difícil distinguir entre dois deslocamentos separados por um único período, o decremento logarítmico, seguindo o mesmo raciocínio apresentado acima pode ser obtido a partir de duas medidas x_1 e x_{m+1} .

Tem-se

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_4} \dots \frac{x_{m-1}}{x_m} \cdot \frac{x_m}{x_{m+1}} = (e^{\zeta\omega_n\tau_d})^m$$

de onde se obtém o decremento logarítmico

$$\delta = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}\right) \tag{2.47}$$

2.4.4 - Energia Dissipada no Amortecimento Viscoso

Como o amortecimento representa a capacidade do sistema em dissipar energia, é útil se estabelecer uma relação entre a energia dissipada e a constante de amortecimento (ou o fator de amortecimento) do sistema. Em se tratando de vibração livre, toda a variação de energia resulta da dissipação: o movimento possui inicialmente uma quantidade de energia que vai diminuindo progressivamente. A taxa de variação da energia com o tempo é dada por

$$\frac{dW}{dt} = \text{força} \times \text{velocidade} = Fv = -(cv)v = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{2.48}$$

onde assumiu-se que a força responsável pela variação é a força de amortecimento viscoso. O sinal negativo representa a variação negativa da energia, em virtude do sistema ser dissipativo.

Quando o fator de amortecimento é pequeno, pode-se considerar que a amplitude permanece constante em um ciclo da vibração sendo $x(t) = X \cos \omega_d t$. A energia dissipada no ciclo de vibração é, portanto

$$\Delta W = -\int_0^{\tau_d} c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = -\int_0^{2\pi/\omega_d} c(-\omega_d X \text{sen } \omega_d t)^2 dt = -\int_0^{2\pi} c\omega_d X^2 \text{sen}^2 \omega_d t d(\omega_d t)$$

resultando em

$$\Delta W = -\pi c\omega_d X^2 \tag{2.49}$$

Da expressão (2.49) se conclui que a energia dissipada depende, além da constante de amortecimento c , também da frequência da vibração livre amortecida ω_d , e do quadrado da amplitude do movimento vibratório X .

A *capacidade específica de amortecimento* do sistema é definida como a relação entre a energia que é dissipada durante um ciclo e a energia total que estava presente no início do referido ciclo. Escolhendo-se o início do ciclo, o instante de tempo em que o sistema possui a máxima energia cinética (também poderia ser potencial), esta pode ser dada por

$$W = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m(\omega_d X)^2 \tag{2.50}$$

A capacidade específica de amortecimento é dada relacionando-se (2.49) e (2.50)

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi c\omega_d X^2}{\frac{1}{2}m\omega_d^2 X^2} = \frac{2\pi c}{m\omega_d} = \frac{4\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\frac{c}{2m\omega_n}\right) = \frac{4\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 2\delta \tag{2.51}$$

O *coeficiente de perda* também é utilizado para representar a capacidade de amortecimento de materiais. É obtido a partir de (2.51) como

$$\text{coeficiente de perda} = \frac{(\Delta W/2\pi)}{W} = \frac{\delta}{\pi} \tag{2.52}$$

Exemplo 2.14 - Um absorvedor de choque é projetado para uma moto de massa igual a 200 kg (Fig. 2.26a). Quando o absorvedor é submetido a uma velocidade inicial devido a uma irregularidade no caminho, a curva resultante

deslocamento x tempo é como a mostrada na Fig. 2.26b. Determinar as constantes de rigidez e amortecimento necessárias para o absorvedor se o período de vibração amortecida é 2 seg e a amplitude x_1 deve ser reduzida para $1/4$ em meio ciclo ($x_{1,5} = x_1/4$). Determinar também a velocidade inicial mínima que produz um deslocamento máximo de 250 mm.

Solução: Inicialmente deve ser determinado o fator de amortecimento ζ , que pode ser obtido a partir do decremento logarítmico δ . A constante de amortecimento pode então ser obtida. A rigidez é determinada através da frequência da vibração livre amortecida. A velocidade inicial é obtida a partir da determinação do tempo correspondente ao máximo deslocamento.

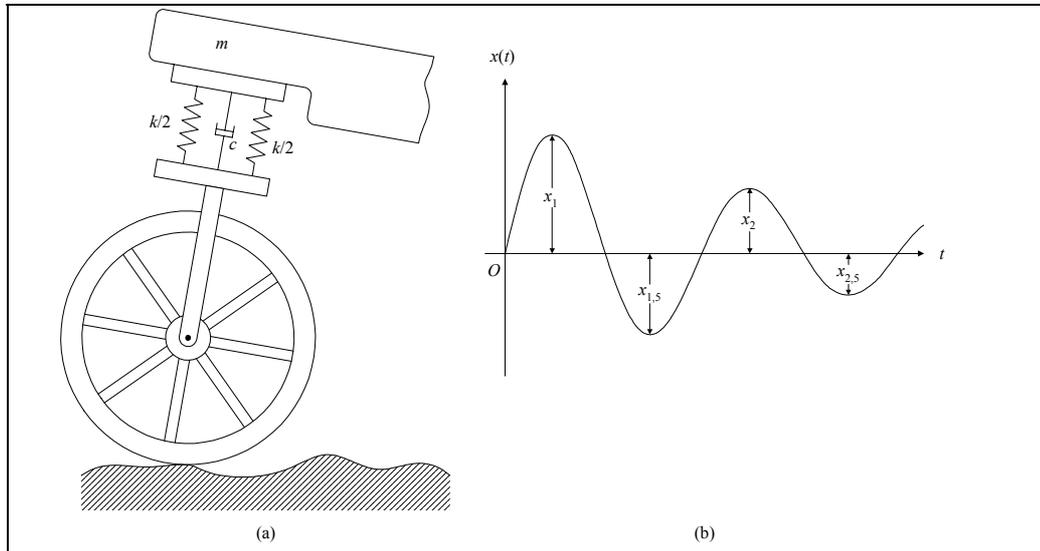


Figura 2.26 - Absorvedor de choque para uma moto.

Se $x_{1,5} = x_1/4$, então o deslocamento x_2 , correspondente a um período após x_1 será $x_2 = x_{1,5}/4 = x_1/16$. O decremento logarítmico é então

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(16) = 2,773$$

Através da expressão (2.46) determina-se o fator de amortecimento por

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = 0,404$$

A frequência natural é obtida a partir do período da oscilação amortecida $\tau_d = 2$ seg.

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi}{\tau_d \sqrt{1 - \zeta^2}} = 3,434 \text{ rad / seg}$$

Se $m = 200$ kg constante de amortecimento crítica é obtida por

$$c_c = 2m\omega_n = 1,374 \times 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{seg}}{\text{m}}$$

A constante de rigidez é dada por

$$k = m\omega_n^2 = 2,358 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

O tempo em que ocorre o máximo deslocamento é o mesmo tempo em que a velocidade se anula. A equação da velocidade é obtida diferenciando-se a expressão (2.36) em relação ao tempo, resultando

$$\dot{x}(t) = X e^{-\zeta\omega_n t} \left[-\zeta\omega_n \cos(\omega_d t - \phi) - \omega_d \text{sen}(\omega_d t - \phi) \right]$$

que será nula se o termo entre colchetes se anular. Considerando as expressões (2.37), sendo o deslocamento inicial nulo, com, conseqüentemente, $\phi = \pi/2$, e $X = v_0/\omega_d$ e as relações trigonométricas

$$\sin(\omega_d t \pm \phi) = \sin \omega_d t \cos \phi \pm \cos \omega_d t \sin \phi$$

$$\cos(\omega_d t \pm \phi) = \cos \omega_d t \cos \phi \mp \sin \omega_d t \sin \phi$$

chega-se a

$$t_1 = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = 0,368 \text{ seg}$$

A expressão (2.36), para o presente caso torna-se

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen } \omega_d t$$

Como este valor máximo é 0,25 m tem-se

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t_1} \text{sen } \omega_d t_1$$

e, substituindo os respectivos valores, chega-se a

$$v_0 = 1,429 \text{ m/s}$$

Exemplo 2.15 - O diagrama esquemático de um canhão é mostrado na Fig. 2.27. Quando a arma é disparada, gases a alta pressão aceleram o projétil dentro do cano até o mesmo atingir uma alta velocidade. A força de reação empurra o corpo do canhão na direção oposta à do projétil. Como é desejável trazer o corpo do canhão para a posição original no menor tempo possível, sem oscilar, coloca-se um sistema mola-amortecedor criticamente amortecido no mecanismo de recuo. Em um caso particular o mecanismo de recuo e o corpo do canhão possuem uma massa de 500 kg com uma mola de rigidez 10000 N/m. O canhão recua 0,4 m após o tiro. Determinar:

- 1) o coeficiente de amortecimento crítico do amortecedor;
- 2) a velocidade inicial de recuo do canhão;
- 3) o tempo gasto pela arma para retornar à posição situada a 0,1 m de sua posição inicial.

Solução:

1) A constante de amortecimento crítico é obtida pela expressão (2.29). Para tanto é necessário, inicialmente, determinar a frequência natural

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10000}{500}} = 4,472 \text{ rad / seg}$$

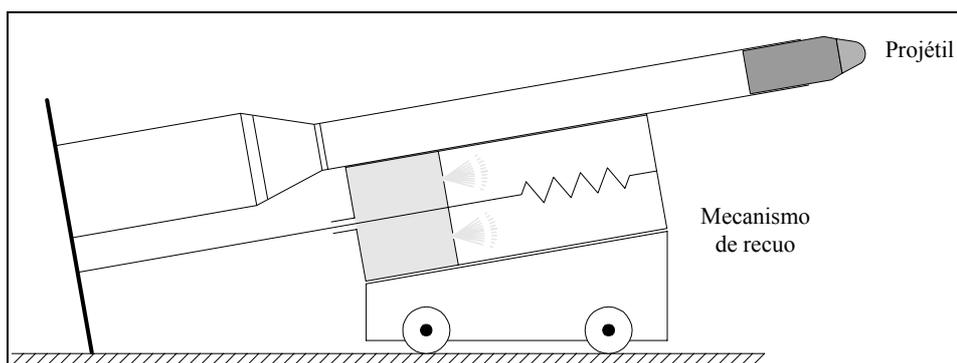


Figura 2.27 - Canhão.

A constante de amortecimento crítico será, então

$$c_c = 2m\omega_n = 2 \times 500 \times 4,4721 = 4,472 \times 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{seg}}{\text{m}}$$

2) Para determinar a velocidade inicial de recuo é necessário recorrer à resposta do sistema criticamente amortecido, dada em (2.41). Se o sistema parte da posição de equilíbrio, $x_0 = 0$, e (2.41) transforma-se em

$$x(t) = v_0 t e^{-\omega_n t}$$

que deve ser derivada para se determinar o tempo em que ocorre o máximo deslocamento

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 e^{-\omega_n t_1} - \omega_n v_0 t_1 e^{-\omega_n t_1} = (1 - \omega_n t_1) v_0 e^{-\omega_n t_1} = 0$$

que se verifica quando

$$t_1 = \frac{1}{\omega_n} \quad e$$

$$x_{max} = 0,4 = v_0 t_1 e^{-\omega_n t_1} = \frac{v_0}{\omega_n} e$$

de onde se chega a

$$v_0 = 0,4 \quad e \quad \omega_n = 4,863 \text{ m/seg}$$

3) O tempo gasto para o canhão voltar à posição original é determinado usando a expressão do deslocamento

$$0,1 = v_0 t_2 e^{-\omega_n t_2}$$

resultando em

$$t_2 = 0,826 \text{ seg}$$

2.5 - Vibração Livre com Amortecimento de Coulomb

O **amortecimento de Coulomb** aparece quando corpos deslizam em superfícies secas. Em muitos sistemas mecânicos, são utilizados elementos que provocam amortecimento por **atrito seco**. Também em estruturas, componentes frequentemente deslizam um em relação ao outro e o atrito seco aparece internamente. A Lei de Coulomb para o atrito seco estabelece que quando dois corpos estão em contato, a força requerida para produzir deslizamento é proporcional à força normal atuante no plano do contato. A força de atrito F

$$F = \mu N \tag{2.53}$$

onde N é a força normal e μ é o coeficiente de atrito. A força de atrito atua em sentido oposto ao da velocidade. O amortecimento de Coulomb é, algumas vezes, chamado de **amortecimento constante**, uma vez que a força de amortecimento é independente do deslocamento e da velocidade, dependendo somente da força normal atuante entre as superfícies em deslizamento.

A Fig. 2.28a, mostra um sistema de um grau de liberdade com amortecimento de Coulomb. A Fig. 2.28b apresenta os diagramas de corpo livre para as duas possíveis orientações do movimento. Em cada uma destas orientações a equação do movimento tomará uma forma diferente. O movimento se dá oscilatoriamente, portanto o sistema está ora em uma situação, ora em outra.

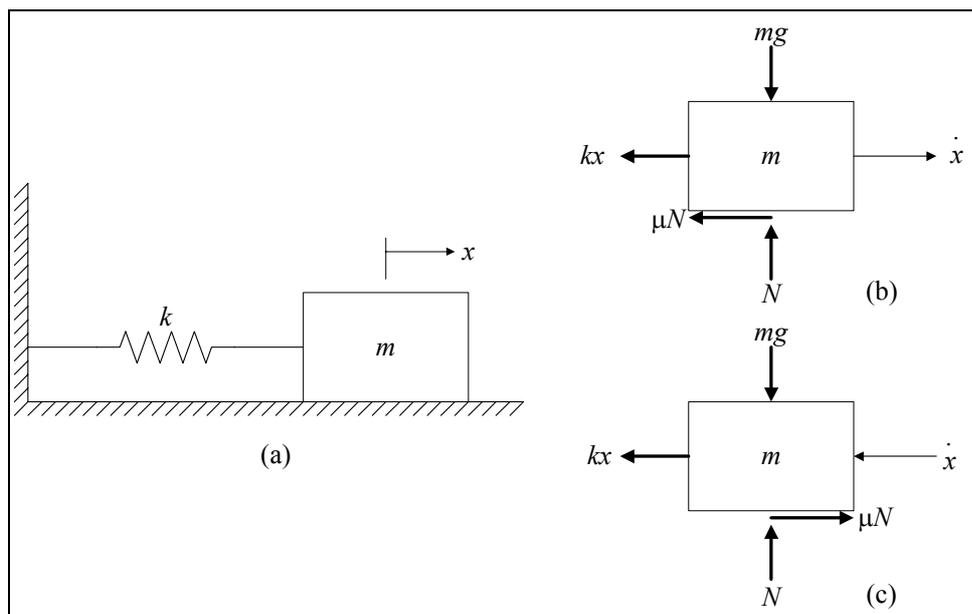


Figura 2.28 - Sistema com amortecimento de Coulomb.

Primeira fase do movimento: Quando a velocidade tiver sentido positivo (segundo o referencial adotado), a força de atrito será negativa e a Segunda Lei de Newton aplicada resultará

$$m\ddot{x} = -kx - \mu N,$$

ou então

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N \tag{2.54}$$

que é uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem, coeficientes constantes, não homogênea. A solução geral desta equação compõe-se de duas partes, uma chamada *homogênea*, que é a solução da equação (2.15), dada em (2.19a), e a outra chamada *particular*, que inclui o termo do lado direito da equação, resultando

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \tag{2.55}$$

A equação (2.54) e, conseqüentemente, sua solução (2.55), valem somente enquanto a velocidade permanecer com o sinal positivo.

Segunda fase do movimento: Quando a velocidade troca de sinal, a força de atrito também muda de sinal resultando na equação

$$m\ddot{x} + kx = \mu N \tag{2.56}$$

que tem solução análoga a (2.40), apenas com o sinal da solução particular invertido, resultando

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \tag{2.57}$$

Em (2.55) e (2.57), o termo $\mu N/k$ representa o deslocamento da mola devido à força de atrito estabelecendo uma nova posição de equilíbrio. Como a força de atrito muda de sentido a cada meio ciclo (período em que a velocidade permanece com sinal inalterado), esta posição de equilíbrio também muda a cada meio ciclo como pode ilustrar a Fig. 2.29.

Solução:

Para complementar a solução das equações (2.54) e (2.56), deve-se analisar o movimento a partir de condições iniciais. O sistema inicia o seu movimento a partir de um deslocamento inicial, com velocidade inicial nula, para caracterizar a inversão do sentido do movimento em cada meio ciclo. São, então, as condições iniciais

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.58}$$

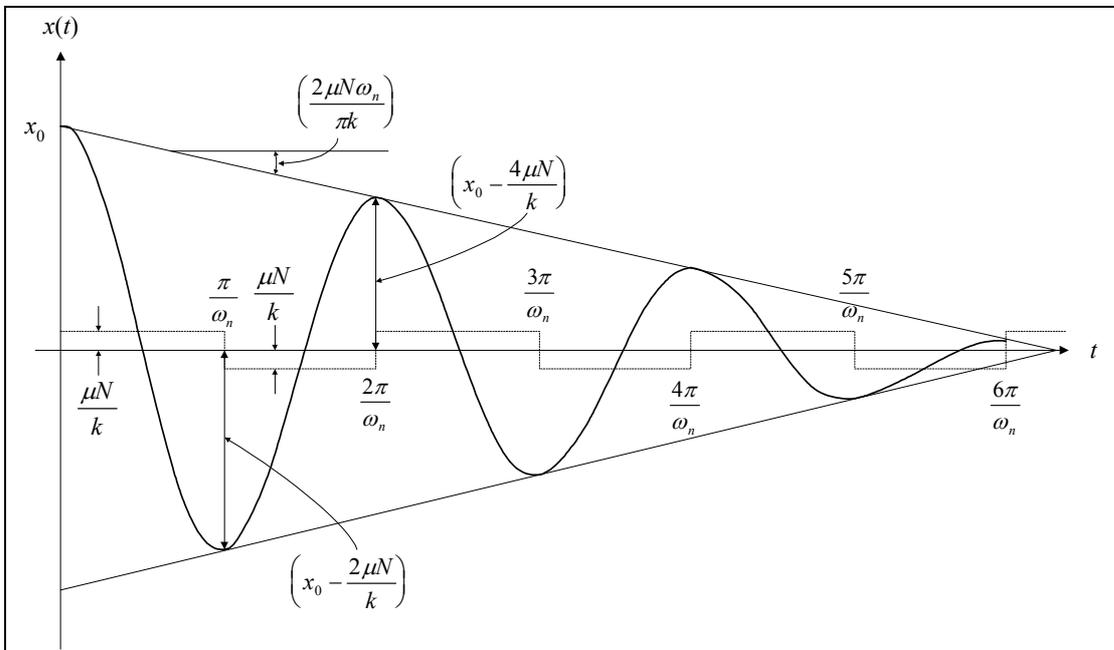


Figura 2.29 - Movimento do sistema com amortecimento de Coulomb.

Se o movimento começa com um deslocamento inicial positivo e velocidade nula, o primeiro meio ciclo ocorrerá com velocidade negativa. A equação que descreve esta fase do movimento é (2.56), cuja solução é dada em (2.57). Introduzindo as condições iniciais (2.58) em (2.57), as constantes podem ser determinadas por

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = A_3 + \frac{\mu N}{k} \\ \dot{x}(t=0) &= 0 = \omega_n A_4 \end{aligned}$$

resultando em

$$A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k} \quad \text{e} \quad A_4 = 0$$

A equação (2.43) se torna, portanto

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \quad (2.59)$$

Esta solução é válida apenas para o primeiro meio ciclo, ou seja $0 \leq t \leq \pi/\omega_n$. Quando $t = \pi/\omega_n$, a massa está em sua posição extrema e a velocidade troca de sentido, e a equação que descreve o movimento é agora (2.54) cuja solução é (2.55). Para que ocorra a continuidade do movimento as condições finais (deslocamento e velocidade) em $t = \pi/\omega_n$, calculadas com (2.54), devem ser as condições iniciais para (2.55)

$$\begin{aligned} x\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) &= \left(x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \cos \pi + \frac{\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k} \right) \\ \dot{x}\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) &= -\omega_n \left(x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \text{sen } \pi = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Aplicando as condições iniciais (2.60) em (2.54), resulta

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k} \right) \\ A_2 &= 0 \end{aligned}$$

O deslocamento, neste segundo meio ciclo do movimento, é regido então por

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k} \right) \cos \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \quad (2.61)$$

Ao final do segundo meio ciclo $t_2 = 2\pi/\omega_n$, quando a velocidade novamente mudará seu sinal, o deslocamento e a velocidade atingirão os seguintes valores

$$\begin{aligned} x\left(t_2 = \frac{2\pi}{\omega_n}\right) &= x_0 - \frac{4\mu N}{k} \\ \dot{x}\left(t_2 = \frac{2\pi}{\omega_n}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Os valores de (2.62) serão as condições iniciais do terceiro meio ciclo, quando, novamente, passa a valer a equação (2.56) e sua solução (2.57). O movimento prosseguirá desta forma, mudando de equação a cada meio ciclo até que no final de um determinado meio ciclo, o deslocamento seja tão pequeno que a força de mola seja incapaz de vencer a força de atrito estático. Isto acontecerá no final do meio ciclo de ordem r que pode ser determinado por

$$x_0 - r \frac{2\mu N}{k} \leq \frac{\mu N}{k} \quad \text{ou} \quad (2.63)$$

$$r \geq \left[\frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}} \right]$$

A característica principal do amortecimento causado por atrito seco, como já foi dito acima, é que a amplitude diminui sempre uma quantidade constante a cada ciclo (ou meio ciclo). Observando (2.59) e (2.61), ambas representam movimentos harmônicos na frequência ω_n , com a amplitude caindo $\frac{2\mu N}{k}$ a cada meio ciclo e com a posição de equilíbrio variando $\pm \frac{\mu N}{k}$ também a cada meio ciclo.

Como o movimento cessa quando a força de mola não mais superar a força de atrito, esta posição normalmente não coincide com a posição de equilíbrio, resultando que, por causa da força de atrito, geralmente a mola ficará com uma certa deformação no fim do movimento. Uma outra característica do sistema com amortecimento provocado por atrito seco é que o mesmo oscila na frequência natural, ao contrário do sistema com amortecimento viscoso, cuja oscilação ocorre em uma frequência que pode ser muito diferente da frequência natural, dependendo do fator de amortecimento. Um outro aspecto que merece ser citado é que, enquanto o sistema com amortecimento viscoso, tem uma queda exponencial da amplitude, o mesmo, teoricamente continuará oscilando indefinidamente, mesmo que com amplitudes infinitesimalmente pequenas (na prática o movimento cessa devido a resistências passivas), o sistema com amortecimento de Coulomb encerra seu movimento em um tempo finito, mesmo teoricamente, quando os deslocamentos forem pequenos.

2.6 - Vibração Livre de Sistemas com Amortecimento Estrutural

O atrito interno que ocorre entre as fibras dos materiais quando as mesmas estão em movimento relativo, o que acontece quando há vibração, é responsável por uma parte da dissipação da energia vibratória. Isto implica então, em uma diminuição da amplitude da vibração livre. Este tipo de amortecimento, também chamado de *amortecimento histerético*, pode ser determinado verificando-se a energia dissipada durante o movimento.

Observando o sistema da Fig. 2.30a, conclui-se que a força que causa o deslocamento $x(t)$ é dada por

$$F(t) = kx + c\dot{x} \tag{2.64}$$

Sendo o movimento harmônico, dado por $x = X \text{ sen } \omega t$

$$F(t) = kX \text{ sen } \omega t + c\omega X \text{ cos } \omega t$$

da trigonometria, pode-se retirar o seguinte artifício

$$X^2 = (X \text{ sen } \omega t)^2 + (X \text{ cos } \omega t)^2 \quad \rightarrow \quad X \text{ cos } \omega t = \pm \sqrt{X^2 - \underbrace{(X \text{ sen } \omega t)^2}_{x^2}}$$

resultando em

$$F(t) = kx \pm c\omega\sqrt{X^2 - x^2} \tag{2.65}$$

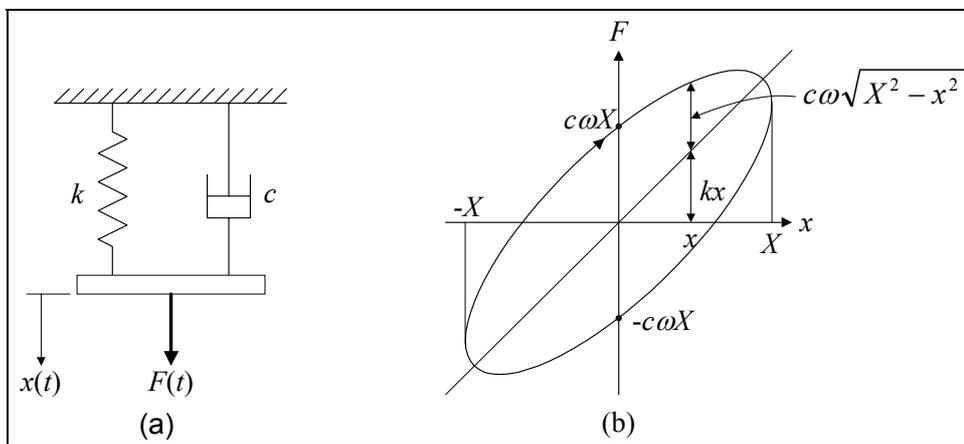


Figura 2.30 - Sistema com amortecimento estrutural.

A Fig. 2.30b mostra o gráfico de $F(t)$ versus x que representa um ciclo. A área interna da elipse representa a energia dissipada em um ciclo de oscilação (diferença de trabalho realizado). Esta área é obtida pela integração

$$\Delta W = \oint F dx = \int_0^{2\pi/\omega} (kX \text{ sen } \omega t + cX\omega \text{ cos } \omega t)(\omega X \text{ cos } \omega t) dt \quad \text{com}$$

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = \frac{d(X \text{ sen } \omega t)}{dt} dt = \omega X \text{ cos } \omega t dt$$

cujo resultado é

$$\Delta W = \pi\omega c X^2 \tag{2.66}$$

O amortecimento causado pelo atrito entre fibras internas que deslizam entre si quando o material deforma é chamado *estrutural* ou *histerético*. Observa-se experimentalmente que se forma um ciclo de histerese na curva tensão-

deformação, como mostra a Fig. (2.31a). A energia perdida em um ciclo é igual à área interna do ciclo de histerese. A similaridade entre as Figs. 2.30b e 2.31a pode ser usada para definir uma constante de amortecimento estrutural. Observa-se, também experimentalmente, que a energia perdida por ciclo devido ao atrito interno é independente da frequência mas aproximadamente proporcional ao quadrado da amplitude. Para se atingir este comportamento na Equação (2.66), assume-se que o coeficiente de amortecimento c é inversamente proporcional à frequência, na forma

$$c = \frac{h}{\omega} \quad (2.67)$$

onde h é chamada de **constante de amortecimento estrutural ou hysterético**. A combinação de (2.66) e (2.67) resulta em

$$\Delta W = \pi h X^2 \quad (2.68)$$

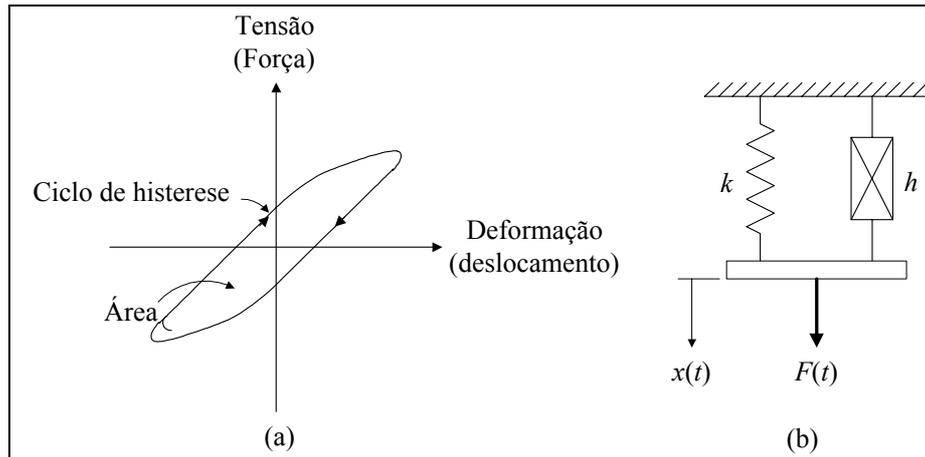


Figura 2.31 - Curva tensão deformação para carregamento cíclico.

2.6.1 - Rigidez Complexa

Se o sistema da Fig. 2.30a, estiver executando um movimento na forma $x = X e^{i\omega t}$ a força será dada por

$$F(t) = kX e^{i\omega t} + c \omega i X e^{i\omega t} = (k + i\omega c)x \quad (2.69)$$

Combinando (2.67) com (2.69), chega-se a

$$F(t) = (k + ih)x = k(1 + i\beta)x \quad (2.70)$$

onde $k(1+i\beta)$ é chamada de **rigidez complexa** do sistema e

$$\beta = \frac{h}{k} = \frac{c\omega}{k} \quad (2.71)$$

é uma medida adimensional do amortecimento conhecida como **fator de perda**.

2.6.2 - Resposta do Sistema

Em termos de β a energia perdida por ciclo pode ser expressa como

$$\Delta W = \pi k \beta X^2 \quad (2.72)$$

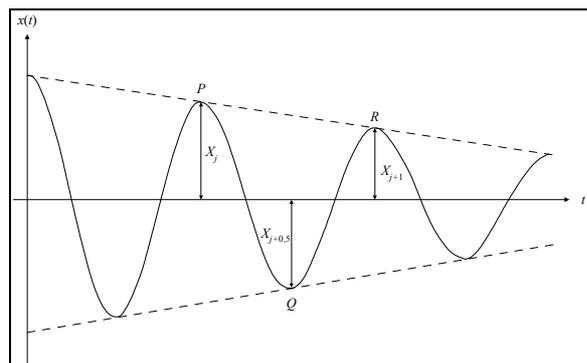


Figura 2.32 - Movimento do sistema com amortecimento hysterético.

Sob amortecimento histerético, o movimento pode ser considerado como aproximadamente harmônico (uma vez que ΔW é pequeno), e o decréscimo da amplitude por ciclo pode ser determinado usando um balanço de energia. Por exemplo, a diferença de energia nos pontos P e Q (separados por meio ciclo), na Fig. 2.32 pode ser dada por

$$\frac{kX_j^2}{2} - \frac{kX_{j+0,5}^2}{2} = \frac{\pi k \beta X_j^2}{4} + \frac{\pi k \beta X_{j+0,5}^2}{4} \quad \text{ou} \quad (2.73)$$

$$\frac{X_j}{X_{j+0,5}} = \sqrt{\frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta}}$$

Da mesma forma, a diferença de energia entre os pontos Q e R produz

$$\frac{X_{j+0,5}}{X_{j+1}} = \sqrt{\frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta}} \quad (2.74)$$

Multiplicando (2.73) por (2.74)

$$\frac{X_j}{X_{j+1}} = \frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta} = \frac{2 - \pi\beta + 2\pi\beta}{2 - \pi\beta} \approx 1 + \pi\beta = \text{constante} \quad (2.75)$$

O decremento logarítmico para o amortecimento estrutural pode ser definido como

$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) \approx \ln(1 + \pi\beta) \approx \pi\beta \quad (2.76)$$

Como assumiu-se que o movimento é aproximadamente harmônico, a frequência correspondente é definida por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.77)$$

O fator de amortecimento viscoso equivalente pode ser encontrado igualando-se as relações para o decremento logarítmico

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \ln\left(\frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta}\right) \quad (2.78)$$

$$\zeta_{eq} = \frac{\beta}{2} = \frac{h}{2k}$$

Então, a constante de amortecimento viscoso equivalente é dada por

$$c_{eq} = c_c \zeta_{eq} = 2\sqrt{mk} \frac{\beta}{2} = \beta\sqrt{mk} = \frac{\beta k}{\omega} = \frac{h}{\omega} \quad (2.79)$$

A adoção de um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente, é somente válida quando o movimento for harmônico. A análise efetuada acima assumiu que o sistema se movimentasse harmonicamente com frequência ω .

2.7 - Vibrações Torcionais

Os conceitos desenvolvidos até aqui podem ser estendidos para sistemas submetidos a vibrações torcionais. **Vibração torsional** é entendida como a oscilação de um corpo em relação a um eixo de referência. O movimento é descrito por uma **coordenada angular** e os esforços atuantes se apresentam na forma de **momentos**. Desta forma o elemento elástico apresenta um **momento de restauração**, resultante da torção deste mesmo elemento. A Fig. 2.33 apresenta o esquema de um disco sustentado por um eixo em torção.

A torção de eixos circulares apresenta a relação entre o momento torsor e a deformação produzida na extremidade dada por

$$\frac{M_t}{\theta} = \frac{GJ}{l} \quad (2.80)$$

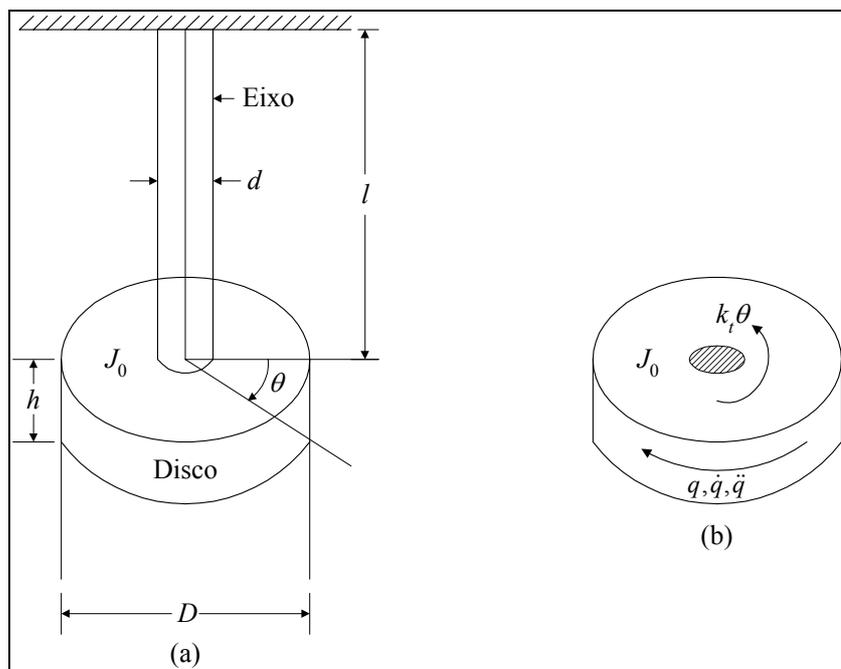


Figura 2.33 - Vibração torsional de um disco.

Sendo M_t o momento torsor aplicado na extremidade do eixo, l o comprimento do eixo, G o módulo de elasticidade transversal do eixo, $J = \frac{\pi d^4}{32}$ o momento de inércia geométrico polar da seção transversal do eixo e θ a deformação produzida na extremidade do eixo. A rigidez torsional, k_t , pode então ser definida como

$$k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GJ}{l} = \frac{\pi G d^4}{32l} \quad (2.81)$$

2.7.1 - Vibração Livre de Sistemas Torcionais

Vibração Livre sem Amortecimento

A vibração livre, gerada por uma condição inicial, é regida por uma equação resultante da aplicação da Segunda Lei de Newton ao movimento angular, em que os esforços atuantes estão mostrados no diagrama de corpo livre da Fig. 2.33b, resultando em

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad (2.82)$$

em que J_0 é o momento de inércia de massa do disco.

A equação (2.82) tem a mesma forma da equação (2.15). A sua solução, portanto segue o mesmo caminho percorrido na seção 2.3. Trata-se portanto de uma equação que descreve um movimento oscilatório de frequência igual à frequência natural do sistema aqui igual a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \\ \tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{k_t}} \end{cases} \quad (2.83)$$

Para eixos de seção não circular a constante de rigidez deverá ser calculada apropriadamente através dos métodos da Resistência dos Materiais.

O momento de inércia de massa de um disco de pequena espessura é

$$J_0 = \frac{\rho h \pi D^4}{32} = \frac{MD^2}{8} \quad (2.84)$$

onde ρ é a densidade do material, h é a espessura, D é o diâmetro e M é a massa do disco.

Seguindo o mesmo procedimento da seção 2.3, a solução da equação diferencial (2.82) tem a forma

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.85)$$

Aplicando as condições iniciais $\theta(t=0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$, as constantes de integração A_1 e A_2 são determinadas e (2.85) se transforma em

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \tag{2.86}$$

A equação (2.86) representa um movimento oscilatório de frequência igual a ω_n que depende, exclusivamente das condições iniciais.

Exemplo 2.16 - Qualquer corpo rígido pivotado em um ponto que não seja o seu centro de gravidade oscilará em torno do ponto de pivotamento, quando deslocado de sua condição de equilíbrio estático, em virtude da força gravitacional. Este tipo de sistema (Fig. 2.34) é conhecido como **pêndulo composto**. Determinar a sua frequência natural.

Solução:

A Segunda Lei de Newton, aplicada ao movimento em relação ao ponto de pivotamento resulta em

$$J_0 \ddot{\theta} + Pd \sin \theta = 0$$

que pode ser linearizada com $\sin \theta \cong \theta$, assumindo-se pequenas oscilações, resultando em

$$J_0 \ddot{\theta} + Pd\theta = 0$$

que é uma oscilação com frequência natural igual a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Pd}{J_0}} = \sqrt{\frac{mgd}{J_0}}$$

Como a frequência natural do pêndulo simples é dada por $\omega_n = \sqrt{g/l}$ é possível se estabelecer um pêndulo simples equivalente ao pêndulo composto (com a mesma frequência natural) que deverá ter um comprimento igual a

$$l = \frac{J_0}{md}$$

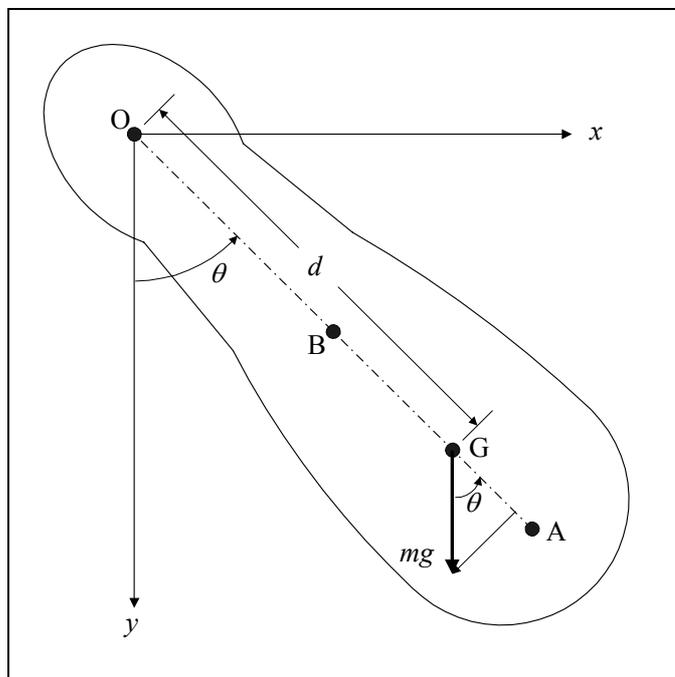


Figura 2.34 - Oscilação de um pêndulo composto.

Se $J_0 = mk_0^2$ onde k_0 é o raio de giração em relação ao pivô O, a frequência natural e o comprimento do pêndulo simples equivalente são dados por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{gd}{k_0^2}} \quad \text{e} \quad l = \frac{k_0^2}{d}$$

O teorema de Steiner (teorema dos eixos paralelos) permite que se relacione o raio de giração em relação ao pivô, k_0 , e o raio de giração em relação ao centro de gravidade k_G , na forma

$$k_0^2 = k_G^2 + d^2$$

usando a relação entre o raio de giração em relação ao pivô e o comprimento do pêndulo simples equivalente, este pode também ser dado por

$$l = \frac{k_0^2}{d} + d$$

Se a linha OG se estende até o ponto A, sendo GA uma distância dada por

$$GA = \frac{k_G^2}{d}$$

e o comprimento do pêndulo simples equivalente será

$$l = GA + d = OA$$

e sua frequência natural pode ser dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\left(\frac{k_0^2}{d}\right)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{OA}}$$

O ponto A que é o ponto onde se deve concentrar toda a massa do corpo para que ele se transforme em um pêndulo simples de mesma frequência natural é conhecido como *centro de percussão*, e tem algumas aplicações práticas, como por exemplo:

1. Um martelo deve ser construído de forma que o seu centro de percussão se localize na cabeça e o centro de rotação na empunhadura para que a força de impacto não produza reação normal na empunhadura;
2. Uma máquina de ensaio de impacto deve ser projetada de forma que o ponto de impacto no corpo de prova seja o centro de percussão do pêndulo para que seja reduzida a deformação por flexão do braço do pêndulo;
3. Se as rodas dianteiras de um automóvel passam por um buraco, os passageiros não sentirão este impacto se o centro de percussão se localizar próximo ao eixo traseiro. O ideal é que o centro de oscilação do veículo se localize em um eixo e o centro de percussão no outro.

Vibração Livre Amortecida

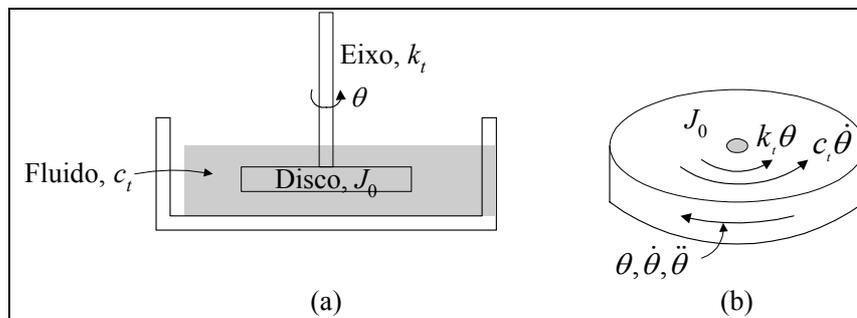


Figura 2.35 - Sistema torsional com amortecimento viscoso.

Os resultados obtidos na seção 2.4 podem ser estendidos diretamente para vibrações torcionais de sistemas com amortecimento viscoso torsional. Considere-se um sistema torsional de um grau de liberdade com um amortecedor viscoso como mostra a Fig. 2.35a. O torque de amortecimento viscoso (Fig. 2.35b) é dado por

$$T = -c_t \dot{\theta} \quad (2.87)$$

onde c_t é a constante torsional de amortecimento viscoso, $\dot{\theta}$ é a velocidade angular do disco e o sinal negativo significa que o torque de amortecimento tem sentido contrário ao da velocidade angular. A equação do movimento pode ser obtida utilizando-se a 2ª Lei de Newton, escrita para o movimento de rotação, como

$$J_0 \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad (2.88)$$

onde J_0 é o momento de inércia de massa do disco, k_t é a constante de rigidez torsional do sistema (torque de restituição por unidade de deslocamento) e θ é o deslocamento angular do disco. A solução da equação (2.88) pode ser obtida exatamente da mesma forma que, na seção 2.4, foi obtida a solução da equação (2.25). Por exemplo, no caso de vibração sub-amortecida, a frequência da vibração amortecida é dada por $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$, onde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \tag{2.89}$$

e

$$\zeta = \frac{c_t}{c_{tc}} = \frac{c_t}{2J_0\omega_n} = \frac{c_t}{2\sqrt{k_t J_0}} \tag{2.90}$$

onde c_{tc} é a constante de amortecimento torsional crítico.

Exemplo 2.17 - Vibração rotacional de sólidos. Um disco circular de raio R tem um furo de raio r a uma distância \bar{r} do seu centro (Fig. 2.36). O disco está livre para girar no plano vertical em torno de um eixo perpendicular ao plano do disco e passando pelo seu centro. Determinar a frequência natural de oscilação do disco.

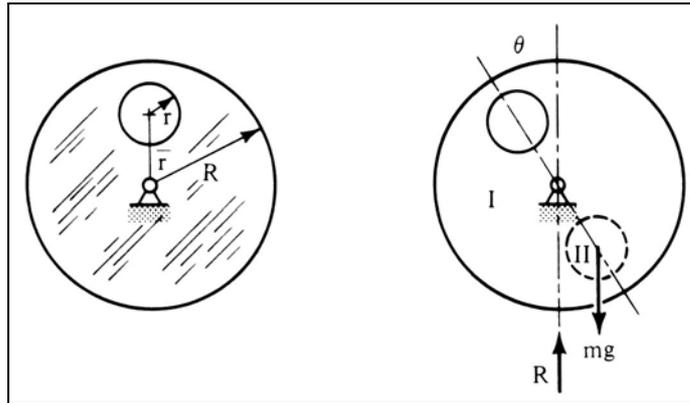


Figura 2.36 – Disco circular com furo.

Solução: O sistema é dinamicamente equivalente a um disco I com dois furos e um disco II menor, de massa m preenchendo o furo inferior. O Princípio de D’Alembert é aplicado para determinar a equação do movimento. Estabelece que as forças de inércia $-\sum m\ddot{x}$ (também chamadas forças efetivas) estão em equilíbrio estático com as forças estáticas do sistema. Considere-se o disco deslocado de sua posição de equilíbrio por um ângulo θ . Considere-se as forças efetivas sobre o disco, isto é, os produtos $m\ddot{x}$ (forças efetivas) e $-J_o\ddot{\theta}$ (momentos efetivos). Além disso, assumir pequenos deslocamentos. O Princípio de D’Alembert exige que

$$\left(\sum M\right)_o + \left(\sum M_{eff}\right)_o = 0 \tag{a}$$

ou, para pequenos ângulos,

$$-mg(\bar{r}\text{sen}\theta) \cong -mg(\bar{r}\theta) = J_o\ddot{\theta} \tag{b}$$

Se M é a massa do disco sem furos, m a massa do material necessário para preencher um furo,

$$J_o = \frac{1}{2}MR^2 - \left(\frac{1}{2}mr^2 + m\bar{r}^2\right) \tag{c}$$

e

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 - m\bar{r}^2\right)\ddot{\theta} + mg\bar{r}\theta = 0 \tag{d}$$

ou

$$\left(\frac{1}{2}\frac{M}{m}R^2 - \frac{1}{2}r^2 - \bar{r}^2\right)\ddot{\theta} + g\bar{r}\theta = 0 \tag{e}$$

Mas

$$\frac{M}{m} = \frac{R^2}{r^2} \tag{f}$$

Portanto

$$r^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^4 - \frac{1}{2} - \left(\frac{\bar{r}}{r} \right)^2 \right] \ddot{\theta} + g\bar{r}\theta = 0 \quad (g)$$

Então

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g\bar{r}}{r^2 \left[0,5(R/r)^4 - (\bar{r}/r)^2 - 0,5 \right]}} \quad (h)$$

Exemplo 2.18 – Uma serra para cortar tubulações em um processo de produção contínua consiste de um disco grande de raio r e massa M , podendo girar em torno do centro O ligado a uma barra leve, de comprimento l , em cuja extremidade é montado um motor de massa m contendo um disco de corte (Fig. 2.37). O sistema pode oscilar no plano em torno do ponto O .

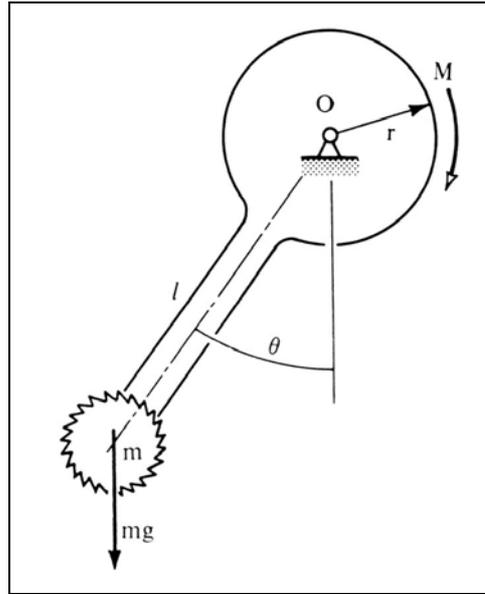


Figura 2.37 – Pêndulo físico composto.

- Determinar o período da oscilação natural do sistema para pequenos ângulos,
- Determinar a velocidade linear máxima do motor se o braço é deslocado inicialmente de um ângulo θ_0 e depois liberado.

Solução:

- Aplicando a 2ª Lei de Newton para a rotação em torno do ponto O tem-se

$$J_O \ddot{\theta} = -mg(l+r) \sin \theta \quad (a)$$

Para θ pequeno

$$J_O \ddot{\theta} + mg(l+r)\theta = 0 \quad (b)$$

O momento de inércia em torno de O é

$$J_O = J_m + J_M = m(l+r)^2 + \frac{1}{2}Mr^2 \quad (c)$$

O período da oscilação natural é

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m_{eq}}{k_{eq}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(l+r)^2 + \frac{1}{2}Mr^2}{mg(l+r)}} \quad (d)$$

- Como $\omega_n = 2\pi/T_n$, tem-se que $\theta = \theta_0 \cos \omega_n t$. A velocidade angular é $\dot{\theta} = -\theta_0 \omega_n \sin \omega_n t$. O seu valor máximo é

$$\dot{\theta}_{\max} = \theta_0 \omega_n = \theta_0 \sqrt{\frac{mg(l+r)}{m(l+r)^2 + \frac{1}{2}Mr^2}} \quad (e)$$

sendo que a velocidade linear máxima é $\dot{\theta}_{\max}(l+r)$.

Exemplo 2.19 – Um medidor de nível de água consiste de uma haste leve B e uma bóia cilíndrica de diâmetro $d = 50$ mm (Fig. 2.38). Determinar o valor da constante de amortecimento c de um amortecedor que produz amortecimento crítico, sendo a massa do cilindro $0,2$ kg, $l = 75$ mm, $L = 250$ mm e a densidade da água $\rho_w = 1000$ kg/m³.

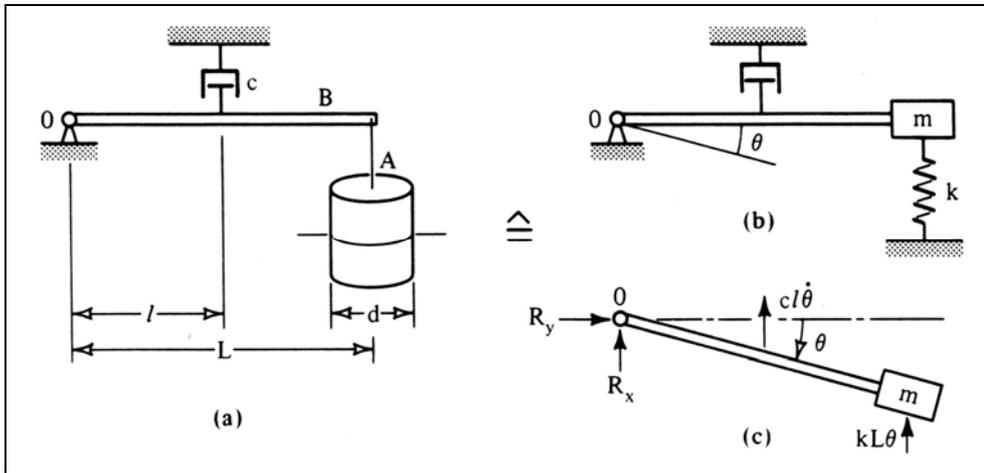


Figura 2.38 – Medidor de nível de água.

Solução: O cilindro flutuante é equivalente a uma mola de rigidez $k = Ag\rho_w$. Os momentos em relação ao pivô O , para θ pequeno, estão mostrados na Fig. 2.38c. A 2ª Lei de Newton produz

$$mL^2\ddot{\theta} = -c l^2 \dot{\theta} - kL^2\theta \quad \text{ou} \quad mL^2\ddot{\theta} + c l^2 \dot{\theta} + kL^2\theta = 0 \tag{a}$$

com $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a constante de amortecimento crítico é

$$[c l^2]_c = 2mL^2\omega_n = 2L^2\sqrt{km}$$

ou

$$c_c = 2\left(\frac{L}{l}\right)^2 \sqrt{km} \tag{b}$$

Como a rigidez é

$$k = Ag\rho_w = \frac{\pi d^2}{4} \times 9,81 \times 1000 = \frac{\pi \times 0,05^2}{4} \times 98100 = 19,3 \text{ N/m}$$

então

$$c_c = 2 \times \left(\frac{0,25}{0,075}\right)^2 \sqrt{0,2 \times 19,3} = 43,6 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

Exemplo 2.20 – Um automóvel pesando 15000 N está apoiado em quatro molas e quatro amortecedores (Fig. 2.39). A deflexão estática do carro é $0,20$ m. Determinar a constante de amortecimento de cada um dos amortecedores para que se tenha amortecimento crítico. Assumir que o carro possui apenas um grau de liberdade com vibração na direção vertical.

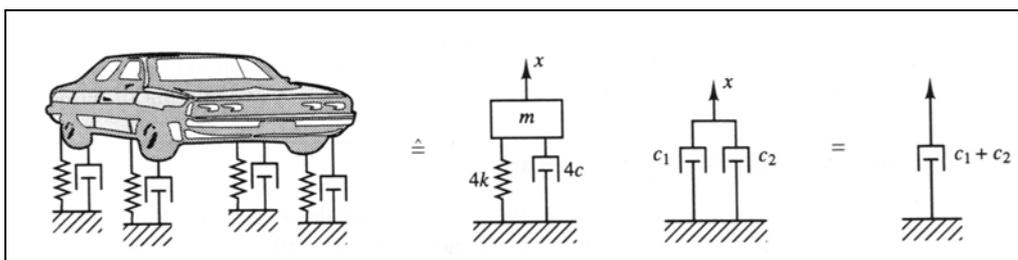


Figura 2.39 – Suspensão automotiva.

Solução: Dois amortecedores em paralelo são equivalentes a um amortecedor com constante de amortecimento $c_1 + c_2$. Isto ocorre porque, a semelhança das molas, apresentam uma força reativa $c_1\dot{x} + c_2\dot{x} = (c_1 + c_2)\dot{x}$. O automóvel pode, então, ser modelado como um oscilador harmônico em vibração vertical com parâmetros $m_{eq} = m$, $c_{eq} = 4c$ e $k_{eq} = 4k$.

Como $m = 15000/g = 1529$ kg, tem-se

$$k_{eq} = 4k = \frac{w}{\delta_{st}} = \frac{15000}{0,20} = 75000 \text{ N/m}$$

A constante de amortecimento crítico será

$$c_{eq} = 4c_c = 2\sqrt{4km} = 2 \times \sqrt{75000 \times 1529} = 21,4 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

e

$$c_c = 5354 \text{ N.s/m}$$

Exemplo 2.21 – Um instrumento eletrônico possui massa $m = 1$ kg estando montado sobre molas com constante de rigidez equivalente $k = 2400$ N/m e constante de amortecimento $c = 2$ N.s/m. O instrumento é deslocado 20 mm de sua posição de equilíbrio e liberado para oscilar. Determinar a amplitude de vibração após 5 oscilações e após 20 oscilações.

Solução: O fator de amortecimento é

$$\zeta = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2}{2 \times 1 \times \sqrt{\frac{2400}{1}}} = 0,0204$$

A oscilação amortecida possui

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2400}{1}} = 49,0 \text{ rad/s e}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 49,0 \times \sqrt{1 - 0,0204^2} \cong 49,0 \text{ rad/s}$$

O movimento será regido pela expressão (2.64) com as constantes calculadas pelas expressões (2.65)

$$X = \frac{x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{0,02}{\sqrt{1 - 0,0204^2}} \cong 0,02 \text{ m e}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0,0204}{\sqrt{1 - 0,0204^2}} \right) \cong \sim 0,0204 \text{ rad}$$

com

$$x(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t - \phi) = 0,02 e^{-0,0204 \times 49 t} \cos(49 t - 0,0204) = 0,02 e^{-0,9996 t} \cos(49 t - 0,0204)$$

Como o período é $T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{49} = 0,128$ s, após cinco períodos $t_5 = 5T = 0,641$ s e

$$X_5 = 0,02 \times e^{-0,9996 \times 0,641} = 0,0105 \text{ m}$$

e, após 20 períodos $t_{20} = 20 T = 2,56$ s e

$$X_{20} = 0,02 \times e^{-0,9996 \times 2,56} = 0,00154 \text{ m}$$

Exemplo 2.22 – Para medir o momento de inércia de um rotor pesado em relação ao seu eixo geométrico (de rotação), o mesmo é montado em dois mancais de rolamento B_1 e B_2 , sendo o diâmetro do eixo $d = 30$ mm (Fig. 2.40). Em um dos furos do disco foi inserido um cilindro de aço de raio R . O rotor torna-se desbalanceado e quando é atribuído um ângulo de rotação inicial o sistema oscilará como um pêndulo físico até que o amortecimento o traga de volta ao repouso. A massa do rotor é $M = 320$ kg. O cilindro de teste possui massa de 10 kg e seu centro está localizado a uma distância radial $R = 300$ mm. Foi medido o período de oscilação e achou-se $T_n = 3,5$ s. Mediu-se também o ângulo de oscilação que diminuiu 6° a cada oscilação.

- a) Determinar o momento de inércia do rotor em relação ao seu eixo geométrico.
- b) Determinar o coeficiente de atrito nos mancais assumindo que as forças dinâmicas devidas ao movimento não afetam a força de atrito, que é obtida através do carregamento estático.

Solução: $J_O = J_R + mR^2$ é o momento de inércia do pêndulo físico em relação ao seu centro de rotação e J_R é o momento de inércia do rotor sem a massa m inserida. A força de atrito é $\mu(M + m)g$ e o torque de atrito é, então, $T_0 = \mu(M + m)gd/2$. Portanto, a equação para o movimento do pêndulo é

$$(J_R + mR^2)\ddot{\theta} + \text{sign}(\dot{\theta})\frac{\mu(M + m)gd}{2} + mgR\theta = 0 \tag{a}$$

A freqüência natural é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgR}{J_R + mR^2}} \tag{b}$$

e, como $T_n = 2\pi/\omega_n$, o momento de inércia é obtido por

$$J_R = \frac{mgRT_n^2}{4\pi^2} - mR^2 = 10 \times 0,3 \left(\frac{9,81 \times 3,5^2}{4\pi^2} - 0,3 \right) = 8,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

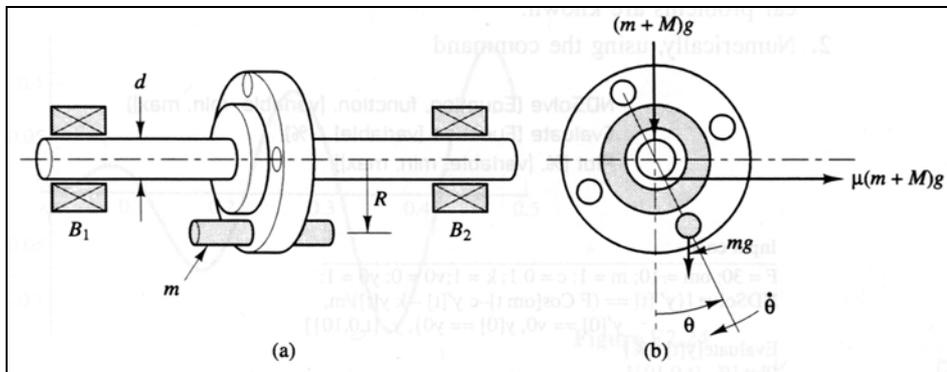


Figura 2.40 – Vibração de um rotor com amortecimento de Coulomb.

A redução da amplitude de vibração por ciclo no atrito de Coulomb linear é $4\mu N/k$, onde N no presente problema é $(M + m)gd/2$ e k o termo mgR . Portanto, para 6° de decaimento por ciclo

$$4 \left[\frac{\mu(M + m)gd}{2mgR} \right] = 6 \times \frac{\pi}{180}$$

O coeficiente de atrito é obtido por

$$\mu = \frac{\pi}{60} \times \frac{mR}{(M + m)d} = \frac{\pi}{60} \times \frac{10 \times 0,3}{(320 + 10) \times 0,03} = 0,0159$$

Este pode ser entendido como o coeficiente de atrito do rolamento uma vez que os coeficientes estático e cinético são muito próximos nestes dispositivos.

Exemplo 2.23 – Um rotor de turbina de alta velocidade possui massa $m = 60 \text{ kg}$ e momento de inércia polar $J_O = 7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e está conectado ao rotor do gerador, girando com uma velocidade angular constante, através de um eixo de duas seções com diâmetros 30 e 50 mm e comprimentos 500 e 400 mm respectivamente. O módulo de elasticidade torsional é $G = 1,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ (Fig. 2.41). Determinar a sua freqüência natural.

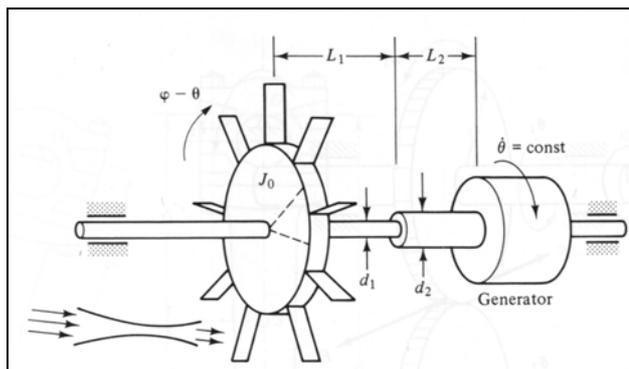


Figura 2.41 – Vibração torsional de rotores.

Solução: As constantes de rigidez torcionais dos dois eixos são $k_T = I_p G/L$, onde o momento de inércia polar da seção é $I_p = \pi d^4/32$. Consequentemente, para as duas seções

$$I_{p1} = \frac{\pi \times 0,03^4}{32} = 7,95 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_{p2} = \frac{\pi \times 0,05^4}{32} = 6,14 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$k_{T1} = \frac{7,95 \times 10^{-8} \times 1,1 \times 10^{11}}{0,5} = 17500 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

$$k_{T2} = \frac{6,14 \times 10^{-7} \times 1,1 \times 10^{11}}{0,4} = 169000 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

Os dois eixos comportam-se como duas molas torcionais combinadas em série, de forma que a rigidez resultante é

$$k_{T12} = \frac{k_{T1} k_{T2}}{k_{T1} + k_{T2}} = \frac{17500 \times 169000}{17500 + 169000} = 15900 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

E a frequência natural torsional é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{T12}}{J_O}} = \sqrt{\frac{15900}{7}} = 47,6 \text{ rad/s}$$