

UNIDADE 3 - VIBRAÇÕES FORÇADAS SOB EXCITAÇÃO HARMÔNICA

3.1 - Introdução

Vibração forçada é aquela que ocorre quando o sistema sofre a ação de forças externas durante o movimento. As forças que atuam sobre o sistema podem ser *determinísticas* ou *aleatórias*, determinando uma característica do movimento vibratório. As forças determinísticas poderão se apresentar de diversas formas. As *forças harmônicas* e as *forças periódicas* são as que representam a maioria dos fenômenos responsáveis por vibrações em sistemas físicos. Como visto na Unidade 2, os sistemas que serão estudados são representados por equações diferenciais lineares. A resposta de um tal sistema, que é a solução da equação do movimento, sob a ação de forças, terá a mesma forma funcional que a força atuante. Isto significa que uma força harmônica produz uma vibração harmônica, uma força periódica produz uma vibração periódica, etc. A *solução particular* da equação diferencial é, então responsável por representar este movimento. Mas a *solução geral* é composta de uma solução homogênea e uma solução particular. A solução homogênea representa a parcela transitória da resposta do sistema, aquela que é produzida pelas condições iniciais do movimento. É também a solução homogênea que representa a resposta transiente que resulta da aplicação eventual de alguma força com tempo de duração finito, o que será visto na Unidade 4.

A excitação harmônica é representada por uma função senoidal apresentando a forma

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t - \phi) \quad \text{ou}$$

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t - \phi)$$

onde F_0 é a amplitude da força (o valor da força quando a mesma é aplicada estaticamente), ω é a frequência com que a força é aplicada (igual a zero quando de aplicação estática) e ϕ é o ângulo de fase medido em relação ao referencial de tempo (atraso da resposta em relação à força).

Em forma complexa pode-se escrever também

$$F(t) = F_0 e^{i(\omega t - \phi)}$$

Este tipo de força produzirá uma resposta harmônica que também terá a forma funcional senoidal.

Neste capítulo, também será visto o fenômeno da *ressonância*, que ocorre quando a frequência com que a força é aplicada coincide com a frequência natural do sistema que sofre a ação da referida força. Este fenômeno é amplamente conhecido e pode produzir graves consequências à integridade estrutural do sistema.

3.2 - Equação Diferencial do Movimento

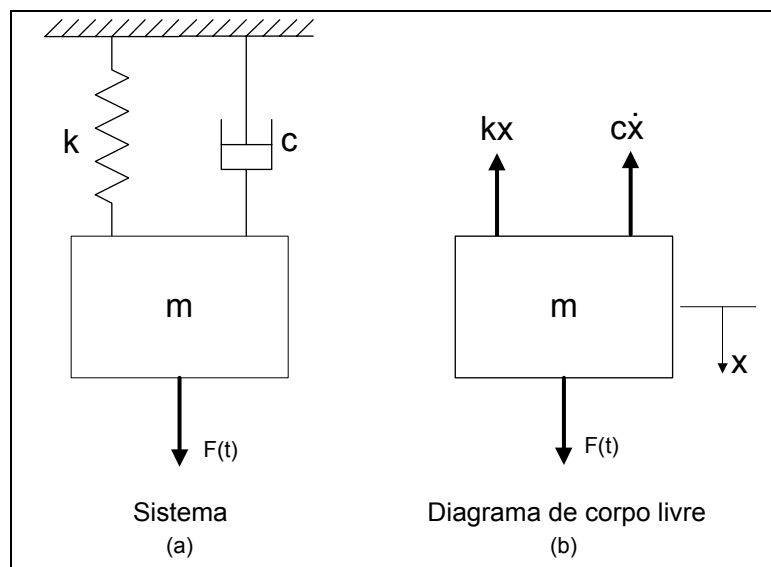


Figura 3.1 - Sistema de um grau de liberdade sob esforço externo.

A Figura 3.1 mostra o modelo de um sistema de um grau de liberdade, amortecido, e seu respectivo diagrama de corpo livre. O diagrama de corpo livre mostrado na Figura 3.1b ilustra as forças atuantes na massa m . Aplicando a 2ª Lei de Newton, a equação diferencial do movimento é obtida como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{3.1}$$

Esta equação diferencial possui uma **solução geral** constituída de uma **solução homogênea** associada a uma **solução particular**

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{3.2}$$

A solução homogênea é obtida fazendo $F(t) = 0$ resultando na vibração livre (dependente das condições iniciais) que foi estudada na Unidade 2. A solução particular representa a **vibração de regime permanente** do sistema, persistindo enquanto a força externa atuar. A Figura 3.2 ilustra a composição da solução da equação diferencial (3.1). A parcela do movimento que diminui com o tempo, devido ao amortecimento é chamada **transiente ou transitória** e a rapidez com que ocorre esta diminuição depende dos parâmetros do sistema, m , c e k .

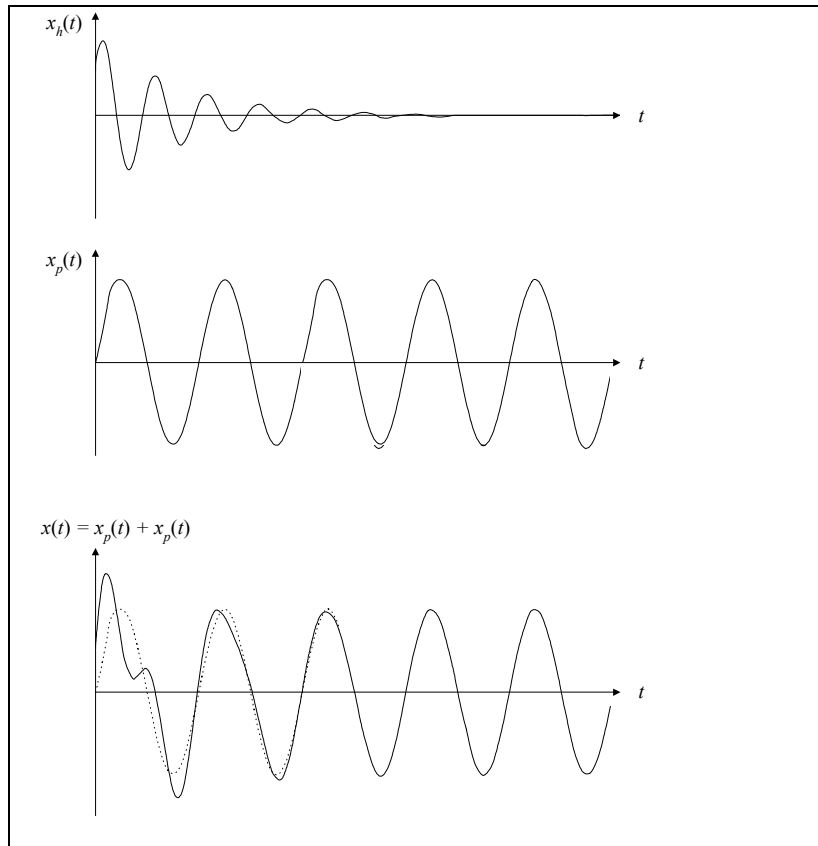


Figura 3.2 - Soluções homogênea, particular e geral da equação diferencial do movimento.

3.3 - Sistema Não Amortecido Sob Força Harmônica

Por simplicidade, estudaremos inicialmente o sistema sem amortecimento ($c = 0$) e com $F(t) = F_0 \cos \omega t$. A equação (3.1) assume a forma

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \tag{3.3}$$

A solução homogênea desta equação, estudada na seção 2.2.1, tem a forma

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \tag{3.4}$$

A solução particular, por sua vez, é

$$x_p(t) = X \cos \omega t \tag{3.5a}$$

Se (3.5a) é solução da equação (3.3), então deve verificar a mesma. Se a velocidade e a aceleração são obtidos por derivação direta

$$\dot{x}_p(t) = -\omega X \sin \omega t \tag{3.5b}$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 X \cos \omega t \tag{3.5c}$$

substituindo (3.5a) e (3.5c) em (3.3), resulta

$$-m\omega^2 X \cos \omega t + kX \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

Dividindo toda a expressão por $\cos \omega t$, e rearranjando, chega-se a

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.5a), a solução particular se torna

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (3.7)$$

A solução geral é obtida como a soma das expressões (3.4) e (3.7), sendo igual a

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sen \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (3.8)$$

Introduzindo as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, as constantes de integração são calculadas, resultando em

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (3.9)$$

que introduzidas em (3.8) resultam na expressão

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right) \sen \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (3.10)$$

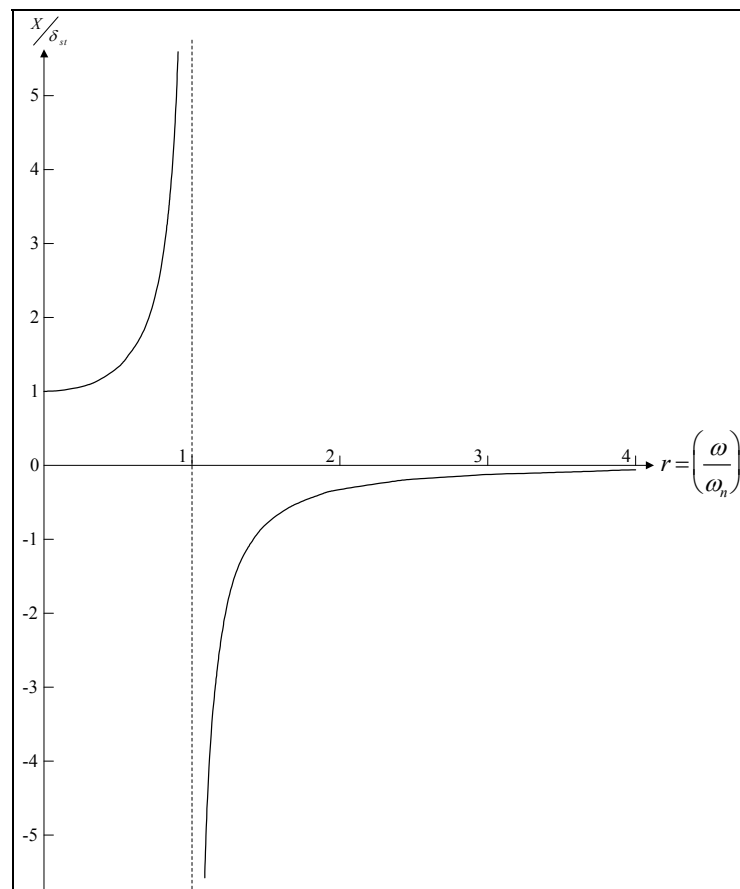


Figura 3.3 - Fator de amplificação dinâmica.

Dividindo numerador e denominador por k em (3.6), sendo a *deflexão estática* $\delta_{st} = F_0/k$, a deformação sofrida pelo sistema quando a força é aplicada estaticamente, e considerando que a frequência natural do sistema é dada por $\omega_n^2 = k/m$ esta expressão (3.6) pode ser escrita na forma

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{3.11}$$

que é chamado de *fator de amplificação dinâmica*.

A Figura 3.3 mostra a função expressa em (3.11), que apresenta três domínios distintos, caracterizando comportamentos diferentes.

Caso 1 - Para $0 < \frac{\omega}{\omega_n} < 1$ o denominador de (3.11) é positivo e a resposta de regime permanente do sistema é dada pela equação (3.7). Diz-se que a resposta harmônica $x_p(t)$ está em *coincidência de fase* com a força externa, conforme mostra a Fig. 3.4.

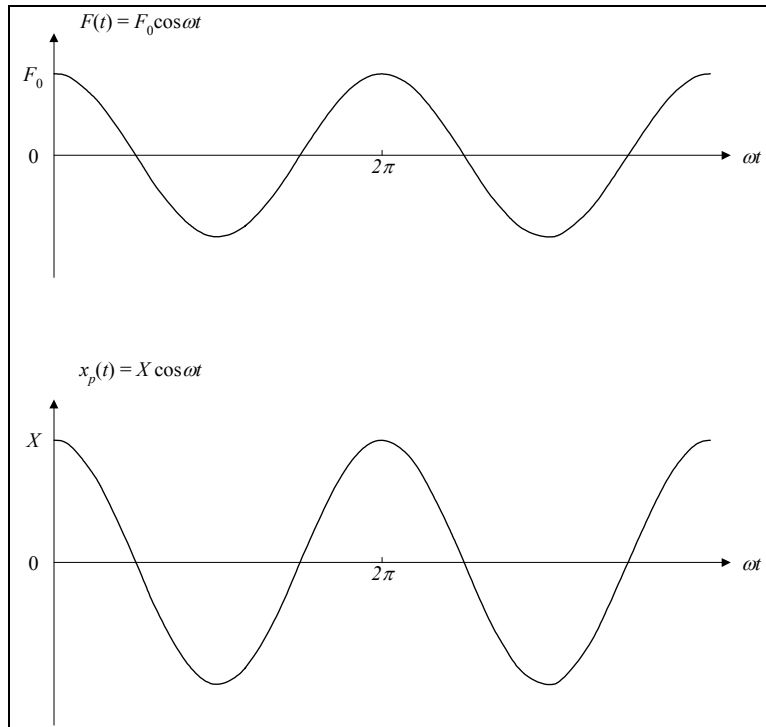


Figura 3.4 - Resposta harmônica em fase com a força externa.

Caso 2 - Para $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ o denominador de (3.11) é negativo e a resposta de regime permanente do sistema é dada por

$$x_p(t) = -X \cos \omega t \tag{3.12}$$

em que a amplitude do movimento é redefinida como uma quantidade positiva, ou

$$X = \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \tag{3.13}$$

Neste domínio a resposta harmônica $x_p(t)$ está *oposição de fase* com a força externa, conforme mostra a Fig. 3.5. Ainda na Fig. 3.3 observa-se também que, para $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \infty$, a amplitude $X \rightarrow 0$, de forma que o deslocamento de um sistema sob excitação harmônica em frequências muito altas é muito pequeno.

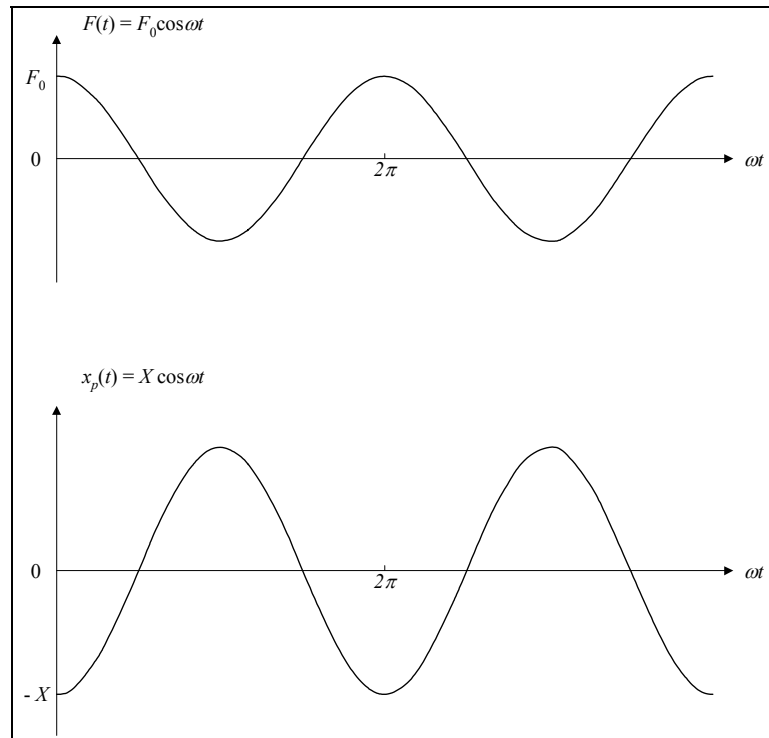


Figura 3.5 - Resposta harmônica em oposição de fase com a força externa.

Caso 3 - Para $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$, a amplitude dada por (3.11) ou (3.13) é infinita. Esta condição, em que a frequência com que a força é aplicada é igual à frequência natural do sistema, é chamada de **RESSONÂNCIA**. Para determinar a resposta nesta condição é necessário que a equação (3.10) seja escrita na forma

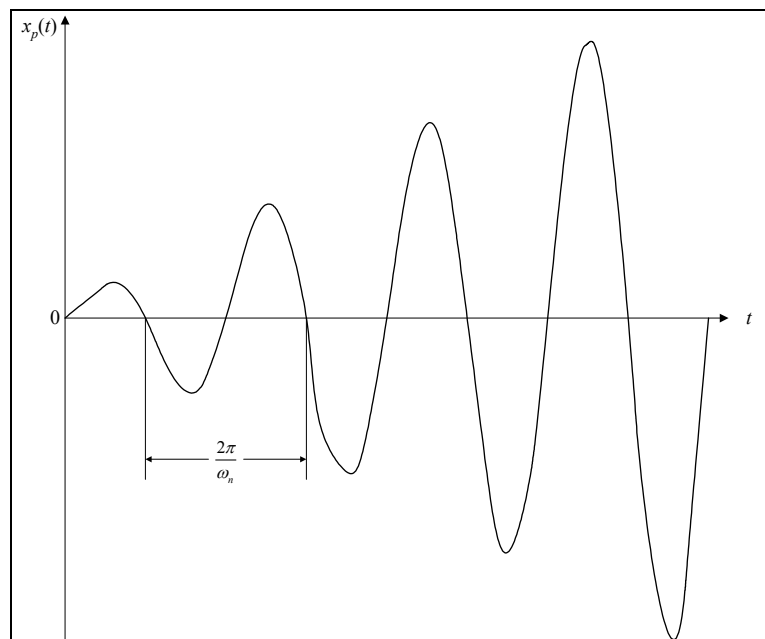


Figura 3.6 - Resposta harmônica na ressonância.

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \text{sen } \omega_n t + \delta_{st} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \quad (3.14)$$

O último termo desta equação vai a infinito quando $\omega = \omega_n$, e para avaliar a função no limite é necessário aplicar a Regra de L'Hospital, resultando

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{\frac{d}{d\omega} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right\}} \right] = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{t \operatorname{sen} \omega t}{\frac{2\omega}{\omega_n^2}} \right] = \frac{\omega_n t}{2} \operatorname{sen} \omega_n t$$

De forma que (3.14), que é a resposta do sistema, se torna

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \operatorname{sen} \omega_n t \tag{3.15}$$

representando um movimento cuja amplitude cresce indefinidamente com o tempo devido ao termo $\frac{\delta_{st} \omega_n t}{2}$ ser sempre crescente, como ilustra a Figura 3.6.

3.3.1 - Resposta Total

A resposta total do sistema, expressa em (3.8), pode ser escrita na forma

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega t ; \quad \text{para } \frac{\omega}{\omega_n} < 1 \tag{3.16}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \cos \omega t ; \quad \text{para } \frac{\omega}{\omega_n} > 1 \tag{3.17}$$

onde as constantes são determinadas a partir das condições iniciais. A Fig. 3.7a mostra o movimento produzido pela equação (3.16) em que a frequência excitadora é menor que a frequência natural do sistema e a Fig. 3.7b aquele produzido por (3.17) em que a frequência excitadora é maior que a frequência natural do sistema.

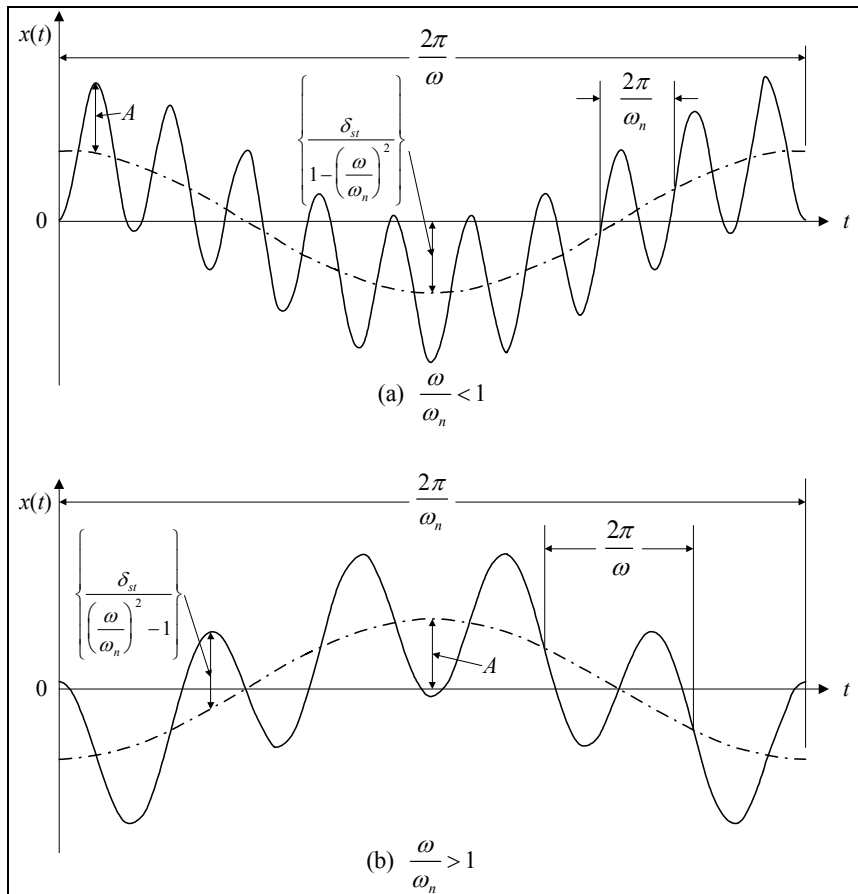


Figura 3.7 - Resposta total do sistema.

3.3.2 - Fenômeno do Batimento

Quando a frequência da força externa é muito próxima da frequência natural, ocorre uma composição de movimentos conhecida como *batimento*. Se, na equação (3.10) fizermos $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, a mesma se torna

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) (\cos \omega t - \cos \omega_n t) = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \\
 &= \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} \left(2 \operatorname{sen} \frac{\omega + \omega_n}{2} t \operatorname{sen} \frac{\omega_n - \omega}{2} t \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Se a diferença entre as frequências é pequena, pode-se dizer que

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_n - \omega &= 2\varepsilon \\
 \omega_n + \omega &\cong 2\omega
 \end{aligned} \right\} \omega_n^2 - \omega^2 = 4\varepsilon\omega$$

e (3.18) se torna

$$x(t) = \left(\frac{F_0/m}{2\varepsilon\omega} \operatorname{sen} \varepsilon t \right) \operatorname{sen} \omega t
 \tag{3.19}$$

cujo movimento está representado na Fig. 3.8.

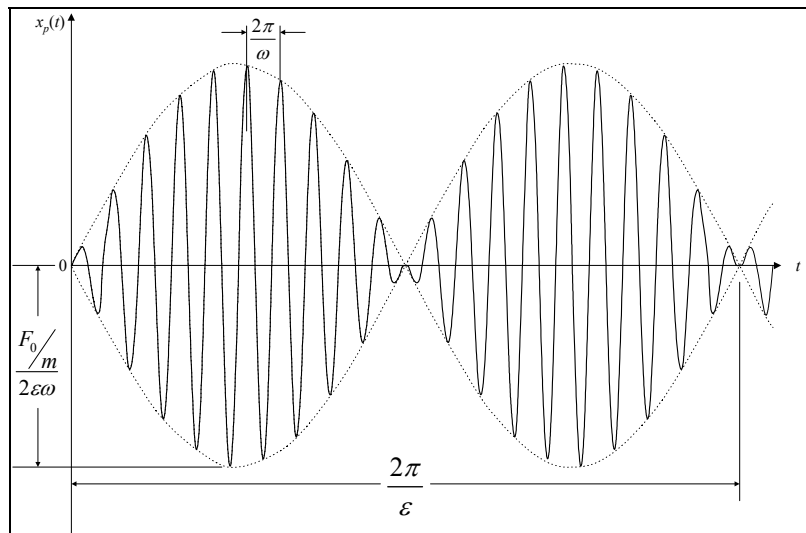


Figura 3.8 - Fenômeno do batimento.

A Fig. 3.8 mostra o movimento composto de uma parcela de baixa frequência envolvendo outra de alta frequência. O movimento de baixa frequência tem período

$$\tau_b = \frac{2\pi}{2\varepsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega}
 \tag{3.20}$$

conhecido como *período de batimento*. A *frequência de batimento*, conseqüentemente, também pode ser obtida por

$$\omega_b = 2\varepsilon = \omega_n - \omega
 \tag{3.21}$$

Exemplo 3.1 - Uma bomba alternativa, pesando 70 kg, está montada no meio de uma placa de aço de espessura igual a 0,0127 m, largura igual a 0,508 m, e comprimento igual a 2,54 m, engastada ao longo de dois lados, como mostra a Fig. 3.9. Durante a operação da bomba, a placa está sujeita a uma força harmônica $F(t) = 220 \cos 62,8t$ N. Encontrar a amplitude de vibração da placa.

Solução: O momento de inércia é dado por

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0,508)(0,0127)^3}{12} = 8,67 \times 10^{-8} m^4$$

A rigidez da placa é obtida modelando-a como uma viga bi-engastada.

$$k = \frac{192EI}{l^3} = \frac{192 \times (2,068 \times 10^{11}) (8,67 \times 10^{-8})}{(2,54)^3} = 2,10 \times 10^5 \text{ N/m}$$

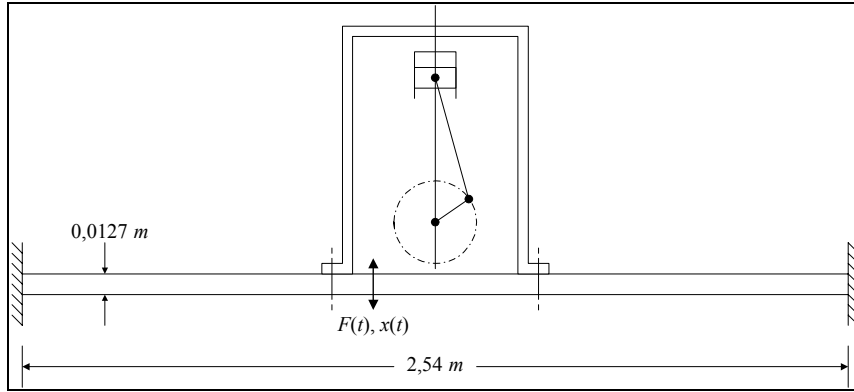


Figura 3.9 - Bomba sobre placa.

A amplitude é obtida aplicando-se (3.6), com $F_0 = 220 \text{ N}$ e $\omega = 62,8 \text{ rad/s}$

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{220}{2,10 \times 10^5 - (70)(62,8)^2} = -3,33 \times 10^{-3} \text{ m}$$

O sinal negativo indica que a frequência da força excitadora é maior que a frequência natural do sistema, uma vez que ocorre oposição de fase.

3.4 - Resposta de um Sistema Amortecido sob Excitação Harmônica

Sob a atuação de uma força harmônica a equação do movimento amortecido se torna

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \tag{3.22}$$

A solução particular é

$$\begin{aligned} x_p(t) &= X \cos(\omega t - \phi) \\ \dot{x}_p(t) &= -\omega X \sin(\omega t - \phi) \\ \ddot{x}_p(t) &= -\omega^2 X \cos(\omega t - \phi) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Substituindo em (3.22) resulta

$$-m\omega^2 X \cos(\omega t - \phi) - c\omega X \sin(\omega t - \phi) + kX \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t \tag{3.24}$$

Colocando a amplitude X em evidência e reagrupando os termos

$$X[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)] = F_0 \cos \omega t \tag{3.25}$$

Usando as relações trigonométricas

$$\begin{cases} \cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi \\ \sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi \end{cases}$$

a expressão (3.25) torna-se

$$X \left\{ [(k - m\omega^2) \cos \phi + c\omega \sin \phi] \cos \omega t + [(k - m\omega^2) \sin \phi - c\omega \cos \phi] \sin \omega t \right\} = F_0 \cos \omega t \tag{3.26}$$

Igualando coeficientes de $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ de ambos os lados da expressão

$$\begin{aligned} X[(k - m\omega^2) \cos \phi + c\omega \sin \phi] &= F_0 \\ X[(k - m\omega^2) \sin \phi - c\omega \cos \phi] &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

De onde se obtém

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (3.28a)$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (3.28b)$$

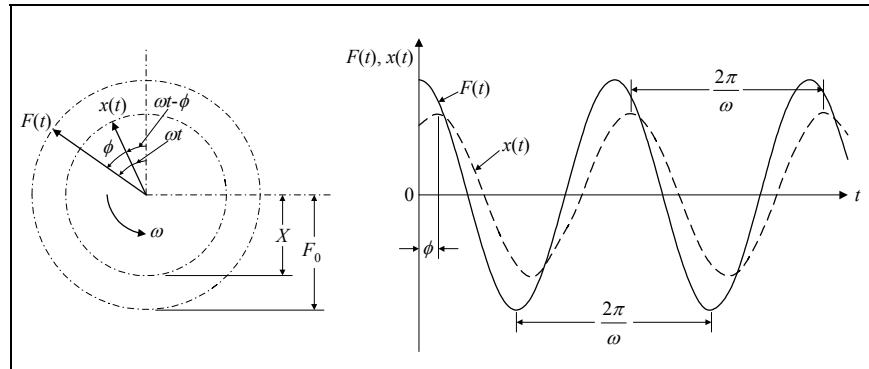


Figura 3.10 - Representação gráfica de função excitadora e resposta.

Dividindo numerador e denominador de (3.28a) e (3.28b) por k tem-se

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \quad (3.29a)$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\frac{c\omega}{k}}{1 - \frac{m}{k}\omega^2} \quad (3.29b)$$

Como $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\zeta = \frac{c}{c_c} \rightarrow \frac{c}{k} = \frac{\zeta c_c}{k} = \frac{\zeta 2m\omega_n}{k} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$ e $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$, tem-se

$$X = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (3.30a)$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.30b)$$

ou ainda com $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \text{razão de frequências}$, pode-se escrever

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.31a)$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1-r^2} \right) \quad (3.31b)$$

Na Fig. 3.11 são apresentadas as funções expressas em (3.31a) e (3.31b). As curvas são obtidas para as relações de X/δ_{st} e ϕ em função de r , de onde podem ser extraídas algumas observações:

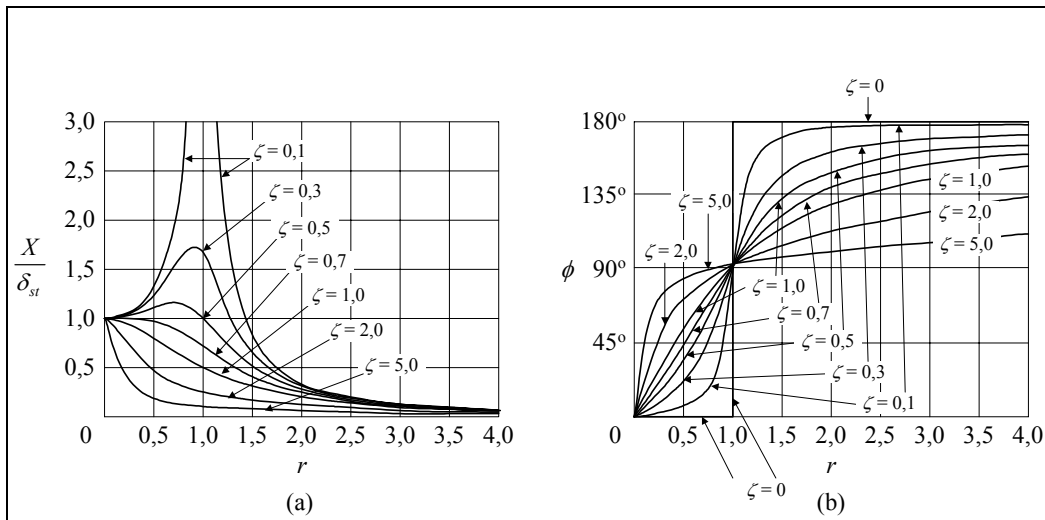


Figura 3.11 - Variação de X e ϕ com a relação de frequências r .

- 1 - Para $\zeta = 0 \rightarrow \phi = 0$ para $r < 1$ e $\phi = \pi$ rad para $r > 1$.
- 2 - O amortecimento reduz a relação de amplitudes para todos os valores da frequência de excitação.
- 3 - A redução da relação de amplitudes na presença do amortecimento é significativa na, ou perto da, ressonância.
- 4 - A máxima relação de amplitudes é obtida fazendo a derivada de $\frac{X}{\delta_{st}}$ em relação a r se igualar a zero. O correspondente valor de r é

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \rightarrow \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} < \omega_d$$

- 5 - O máximo valor de X , obtido de (3.31a) quando $r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, é

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{max} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (1 - 2\zeta^2))^2 + (2\zeta)^2(1 - 2\zeta^2)}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.32)$$

A expressão (3.31) permite a obtenção experimental do fator de amortecimento a partir da medição do máximo valor da relação de amplitudes.

Na ressonância, com $\omega = \omega_n$ ou $r = 1$ a relação de amplitudes (3.31a) se torna

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{res} = \frac{1}{2\zeta} \quad (3.33)$$

- 6 - Para $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (0,707), observa-se que a relação de amplitudes é menor que 1 para qualquer valor de r .
- 7 - O ângulo de fase ϕ não depende da magnitude da força excitadora F_0 .
- 8 - Para $r \ll 1$, $\phi \rightarrow 0 \rightarrow$ a resposta vibratória está em fase com a força excitadora. Para $r \gg 1$, $\phi \rightarrow \pi$, a resposta vibratória está em oposição de fase com a força excitadora. Na ressonância, para qualquer valor de ζ , o ângulo de fase ϕ é sempre igual a $\pi/2$, independente do fator de amortecimento. Isto é utilizado para determinação experimental da frequência de ressonância uma vez que, como foi visto acima, a amplitude máxima não ocorre na ressonância, de forma que a medição do ângulo de fase permite uma medida mais precisa da frequência natural do sistema.

3.4.1 - Resposta Total

A resposta total é a solução geral da equação diferencial (3.22) cuja solução homogênea foi obtida no Cap. 2, Eq. (2.22) e a solução particular é (3.23), resultando

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) + X \cos(\omega t - \phi) \quad (3.34)$$

As constantes X_0 e ϕ_0 são constantes de integração obtidas através das condições iniciais. Com $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$, X_0 e ϕ_0 são obtidos como

$$X_0 = \frac{1}{\omega_d} \sqrt{\left[v_0 + \zeta \omega_n (x_0 - X \cos \phi) - \omega X \sin \phi \right]^2 + (x_0 - X \cos \phi)^2 \omega_d^2} \quad (3.35a)$$

e

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left[\frac{v_0 + \zeta \omega_n (x_0 - X \cos \phi) - \omega X \sin \phi}{\omega_d (x_0 - X \cos \phi)} \right] \quad (3.35b)$$

onde X e ϕ são obtidos por (3.31a) e (3.31b), respectivamente.

3.4.2 - Fator de Qualidade e Largura de Banda

Para baixos fatores de amortecimento $\zeta < 0,05$ a eq. (3.33) pode ser utilizada

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}} \right) \cong \left(\frac{X}{\delta_{st}} \right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} = Q \quad (3.36)$$

onde Q é chamado de *fator de qualidade*.

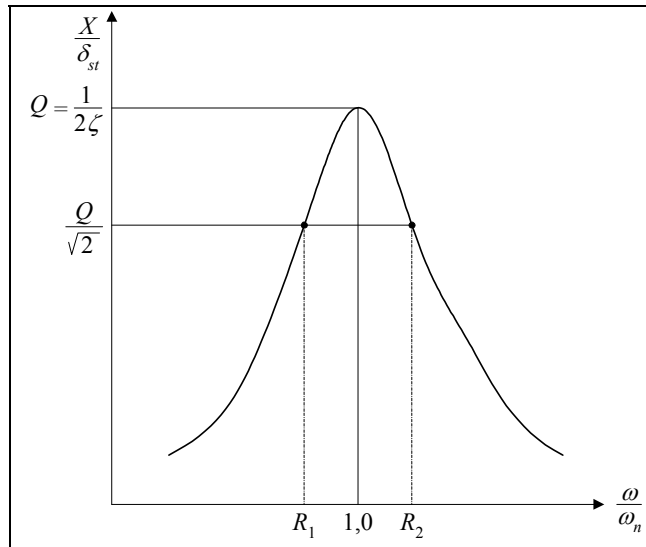


Figura 3.12 - Pontos de meia potência e largura de banda.

Na Fig. 3.12 os pontos R_1 e R_2 correspondentes a relações de frequência para as quais a razão de amplitudes é $\frac{Q}{\sqrt{2}}$, são chamados de *pontos de meia potência*, pois a energia vibratória é proporcional ao quadrado da amplitude no movimento harmônico. A diferença entre as frequências correspondentes a estes dois pontos, $\omega_2 - \omega_1$, define o que se chama de *largura de banda*. Os valores das relações de frequência correspondentes a estes pontos podem ser obtidos

fazendo $\left(\frac{X}{\delta_{st}} \right) = \frac{Q}{\sqrt{2}}$ em (3.31a), usando (3.36)

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}} \right) = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.37)$$

que é resolvida para obter o valor de r , resultando em

$$r_{1,2} = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} \quad (3.38)$$

Para $\zeta \ll 1$, $\zeta^2 \cong 0$ e (3.38) se torna

$$\begin{aligned} r_1^2 &= 1 - 2\zeta = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 \\ r_2^2 &= 1 + 2\zeta = \left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Subtraindo-se as duas raízes de (3.39), tem-se

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_n^2} = 1 + 2\zeta - (1 - 2\zeta) = 4\zeta \quad (3.40)$$

Abrindo o produto notável do numerador de (3.40), obtém-se

$$\frac{(\omega_1 + \omega_2)(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_n} = 4\zeta \quad (3.41)$$

Como $\omega_n \cong \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \rightarrow \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_n} \cong 2$, tornando (3.41)

$$2 \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_n} = 4\zeta \rightarrow \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n \quad (3.42)$$

e, considerando (3.36) chega-se a

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1} \quad (3.43)$$

onde se tem o fator de qualidade expresso em função da largura de banda $\omega_2 - \omega_1$. Um método experimental de determinação do fator de amortecimento se fundamenta nesta equação: medindo-se as frequências correspondentes às amplitudes iguais à amplitude ressonante dividida por $\sqrt{2}$ (ω_1 e ω_2), determina-se o fator de amortecimento por (3.43).

3.5 - Resposta de um Sistema Amortecido à Excitação Complexa

Considerando a equação do movimento na forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.44)$$

que tem solução particular na forma

$$x_p(t) = X e^{i\omega t} \quad (3.45)$$

que, substituída em (3.44), resulta

$$(-m\omega^2 + ci\omega + k)X e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.46)$$

de onde se conclui que

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \quad (3.47)$$

A eq. (3.47) pode ser escrita na forma $Z(i\omega) = \frac{F_0}{X} \rightarrow Z(i\omega) = \textit{impedância mecânica}$.

Multiplicando numerador e denominador de (3.47) pelo conjugado do denominador, chega-se a

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} [(k - m\omega^2) - ic\omega] \quad (3.48)$$

ou ainda

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} e^{-i\phi} \quad (3.49a)$$

e

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (3.49b)$$

Substituindo (3.49a) em (3.45), chega-se à solução particular

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad (3.50)$$

Resposta em Frequência

Realizando a mesma operação realizada em (3.30a), ou seja, dividindo numerador e denominador por k e utilizando $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\frac{c}{k} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$ e $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, a expressão (3.45) pode ser escrita na forma

$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} = H(i\omega) \quad (3.51)$$

que é chamada de *resposta em frequência complexa*. O módulo da resposta em frequência complexa é

$$|H(i\omega)| = \left| \frac{kX}{F_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.52)$$

de forma que a resposta em frequência complexa pode ser escrita na forma

$$H(i\omega) = |H(i\omega)| e^{-i\phi} \quad (3.53a)$$

onde

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \quad (3.53b)$$

A resposta de regime permanente (solução particular) pode também ser escrita na forma

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \quad (3.54)$$

A resposta harmônica também pode ser representada pelas partes real e imaginária da resposta à excitação complexa. Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, tem-se de (3.23), considerando-se (3.28) e (3.29)

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi) \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{F_0}{k} H(i\omega) e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Se $F(t) = F_0 \sin \omega t$, tem-se de (3.23), considerando-se (3.28) e (3.29)

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \phi) \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{F_0}{k} H(i\omega) e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Representação Vetorial Complexa do Movimento Harmônico

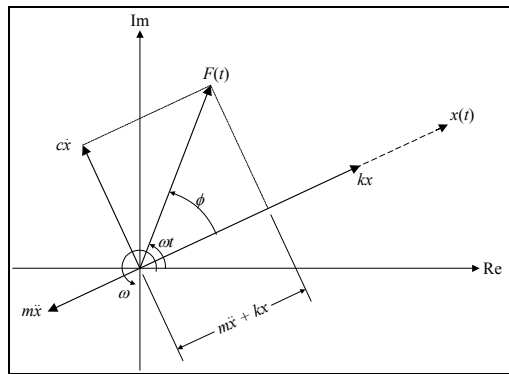


Figura 3.13 - Representação complexa do movimento harmônico.

Se o deslocamento é dado por (3.54), a velocidade e a aceleração são determinados por derivação como

$$\dot{x}_p(t) = i\omega \frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t) \tag{3.57a}$$

e

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 \frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} = \omega^2 x_p(t) \tag{3.57b}$$

concluindo-se que a velocidade está adiantada $\pi/2$ em relação ao deslocamento e a aceleração está em oposição de fase, também em relação ao deslocamento. O diagrama mostrado na Fig. 3.13 mostra a configuração de forças durante o movimento. O sistema está em equilíbrio dinâmico e a evolução no tempo possui o efeito apenas de girar o diagrama por inteiro sem mudar a posição relativa entre os vetores nem desfazer o equilíbrio de forças.

3.6 - Resposta de um Sistema Amortecido sob Movimento Harmônico da Base

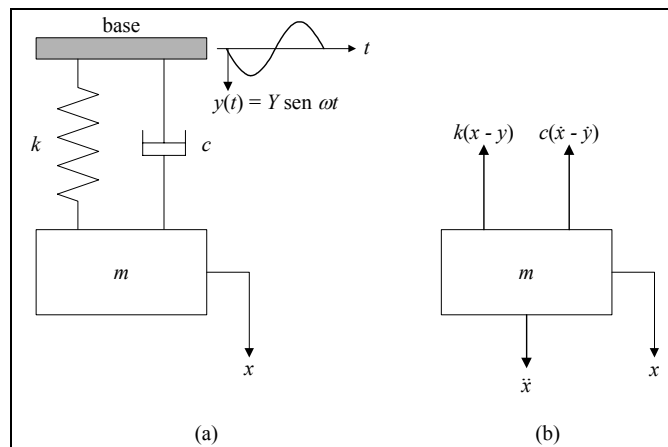


Figura 3.14 - Sistema com movimento na base.

O sistema da Fig. 3.14a, tem seu movimento provocado pelo movimento de sua base $y(t)$. O diagrama de corpo livre, mostrado na Fig. 3.14b, apresenta as forças atuantes na massa m . A Segunda Lei de Newton é aplicada para determinar a equação do movimento que se torna

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{3.58}$$

Se $y = Y \text{ sen } \omega t$ então $\dot{y} = \omega Y \text{ cos } \omega t$ e a eq. (3.58) se torna

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY \text{ sen } \omega t + c\omega Y \text{ cos } \omega t \tag{3.59}$$

cuja solução particular é

$$x_p(t) = \frac{kY \text{ sen}(\omega t - \phi_1)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} + \frac{c\omega Y \text{ cos}(\omega t - \phi_1)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \tag{3.60}$$

Considerando $\text{cos}(\omega t - \phi_1 - \phi_2) = \text{cos } \phi_2 \text{ cos}(\omega t - \phi_1) + \text{sen } \phi_2 \text{ sen}(\omega t - \phi_1)$, (3.60) pode ser escrita na forma

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) = Y \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \quad (3.61)$$

com a relação de amplitudes dada por

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.62a)$$

e os ângulos de fase

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \quad (3.62b)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{k}{c\omega}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\zeta r}\right) \quad (3.62c)$$

A eq. (3.62a) expressa o que se chama de **transmissibilidade** entre a base e o sistema. Na forma complexa, sendo $y(t) = \text{Re}[Ye^{i\omega t}]$, a solução particular é dada por

$$x_p(t) = \text{Re}\left[\left(\frac{1 + i2\zeta r}{1 - r^2 + i2\zeta r}\right)Ye^{i\omega t}\right] \quad (3.63)$$

e a transmissibilidade é dada por

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{1 + (2\zeta r)^2} |H(i\omega)| \quad (3.64)$$

3.6.1 - Força Transmitida

Como pode ser visto na Fig. 3.14b a força resultante que atua na base é a soma das forças atuantes na mola e no amortecedor, ou

$$F = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x} \quad (3.65)$$

Se a solução particular é $x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2)$, a força será

$$F = m\omega^2 X \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) = F_T \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \quad (3.66)$$

onde F_T é chamado de **força transmitida**, dada por

$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.67)$$

A Fig. 3.15 mostra curvas da força transmitida em função de r para vários valores do fator de amortecimento, onde se torna evidente que, para $r > \sqrt{2}$ o acréscimo de amortecimento aumenta significativamente a força transmitida. Isto nos faz concluir que acrescentar amortecimento quando a frequência vibratória é superior a $\sqrt{2}\omega_n$ não é uma solução adequada para isolamento de vibrações transmitidas pela base do sistema.

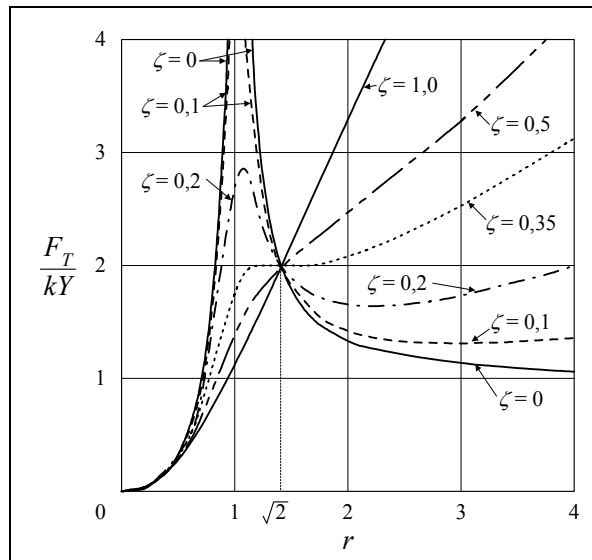


Figura 3.15 - Força transmitida.

3.6.2 - Movimento Relativo

Em muitas aplicações é interessante representar o movimento em relação à base. Sendo $z = x - y$, o deslocamento da massa em relação à sua base, a equação do movimento torna-se

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}) + c\dot{z} + kz = 0 \tag{3.68}$$

ou então

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \text{sen } \omega t \tag{3.69}$$

cujas solução é

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y \text{sen}(\omega t - \phi_1)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = Z \text{sen}(\omega t - \phi_1) \tag{3.70}$$

e a relação de amplitudes é dada por

$$\frac{Z}{Y} = \frac{m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{3.71}$$

A Fig. 3.16 apresenta a variação da relação de amplitudes com r para vários fatores de amortecimento.

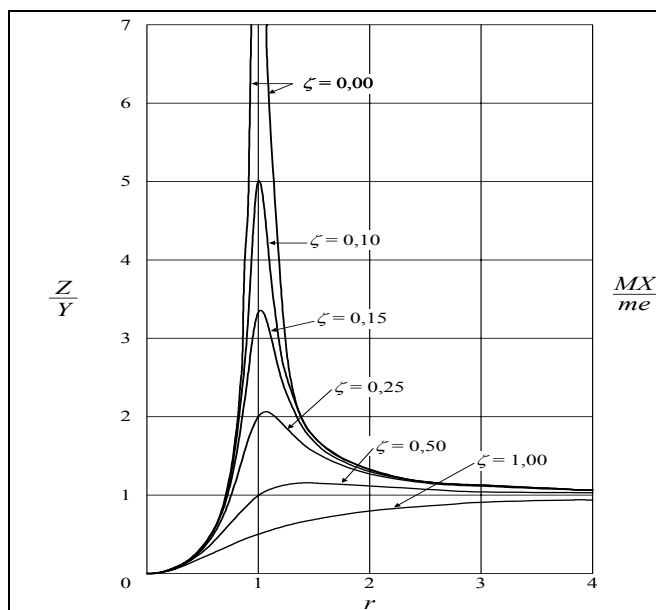


Figura 3.16 - Movimento relativo à base e desbalanceamento.

Exemplo 3.2 - A Fig. 3.17a mostra um modelo simples de um veículo que pode vibrar na direção vertical quando trafega por uma estrada irregular. O veículo tem uma massa de 1200 kg. O sistema de suspensão tem uma constante de mola de 400 kN/m e um fator de amortecimento de 0,5. Se a velocidade do veículo é 100 km/h, determinar a amplitude de deslocamento do mesmo. A superfície da estrada varia senoidalmente com uma amplitude de 0,05 m e um comprimento de 6 m.

Solução: O modelo adotado é de um sistema de um grau de liberdade com excitação pela base. A frequência excitadora é dada por

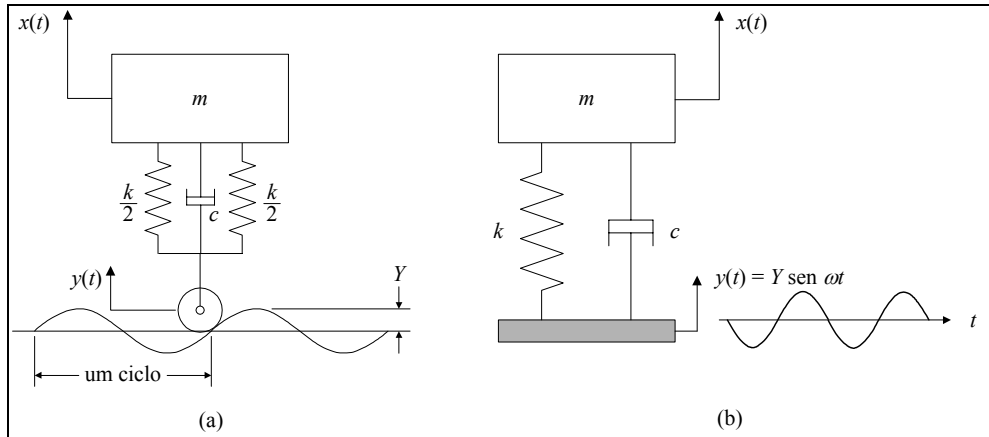


Figura 3.17 - Veículo em movimento em um piso irregular.

$$f = \frac{v}{l} = \frac{100000/3600}{6} = 4,63 \text{ Hz(cps)}$$

com a frequência angular sendo

$$\omega = 2\pi f = 2\pi (4,63) = 29,1 \text{ rad/s}$$

A frequência natural é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400000}{1200}} = 18,3 \text{ rad / s}$$

A relação de frequências é obtida por

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{29,1}{18,3} = 1,59$$

A amplitude é, então obtida utilizando a eq. (3.62a)

$$\frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0,5 \times 1,59)^2}}{\sqrt{(1 - 1,59^2)^2 + (2 \times 0,5 \times 1,59)^2}} = 0,849$$

consequentemente

$$X = 0,849 \times 0,05 = 0,0425 \text{ m}$$

Exemplo 3.3 - Uma máquina pesando 3000 N está apoiada em uma base deformável. A deflexão estática da base, devida ao peso da máquina é 7,5 cm. Observa-se que a máquina vibra com uma amplitude de 1 cm quando a base está sujeita à oscilação harmônica na frequência natural do sistema com amplitude de 0,25 cm. Achar:

- (1) a constante de amortecimento da base;
- (2) a amplitude da força dinâmica na base, e
- (3) a amplitude do deslocamento da máquina em relação à base.

Solução:

- (1) Para determinar a constante de amortecimento é necessário, em primeiro lugar, determinar a constante de rigidez

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{3000}{0,075} = 40000 \text{ N / m}$$

O fator de amortecimento é obtido resolvendo-se a eq. (3.62a) na ressonância ($r = 1$)

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{1+(2\zeta)^2}{(2\zeta)^2}} = \frac{1}{0,25}$$

resultando em

$$\zeta^2 = \frac{1}{60} \Rightarrow \zeta = 0,129$$

Com isto, a constante de amortecimento é obtida por

$$c = 2\zeta m \omega_n = 2\zeta \sqrt{km} = 2 \times 0,129 \times \sqrt{40000 \times \frac{3000}{9,81}} = 903 \frac{N \cdot s}{m}$$

(2) A força atuante na base é obtida de (3.67) com $r = 1$ resultando em

$$F_r = kY \sqrt{\frac{1+(2\zeta)^2}{(2\zeta)^2}} = kX = 40000 \times 0,01 = 400 \text{ N}$$

(3) A amplitude do movimento relativo é calculada a partir da expressão (3.71), que, para $r = 1$, torna-se

$$Z = \frac{Y}{2\zeta} = \frac{0,0025}{2 \times 0,129} = 0,00968$$

Pode ser observado que, embora sendo a amplitude do movimento relativo definido como $z = x - y$, Z não é igual à diferença entre as amplitudes X e Y . Isto se dá porque existe um ângulo de fase entre os movimentos, de forma que não atingem os seus valores máximos no mesmo instante de tempo.

3.7 - Resposta de um Sistema Amortecido sob Desbalanceamento Rotativo

No sistema mostrado na Fig. 3.18, o movimento é gerado pela componente da força centrífuga atuante na direção vertical. As componentes horizontais são sempre iguais e opostas, anulando-se a cada instante. Desta forma a força externa, de natureza harmônica, é dada por

$$F(t) = m e \omega^2 \text{ sen } \omega t \tag{3.72}$$

A equação diferencial do movimento é, então

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m e \omega^2 \text{ sen } \omega t \tag{3.73}$$

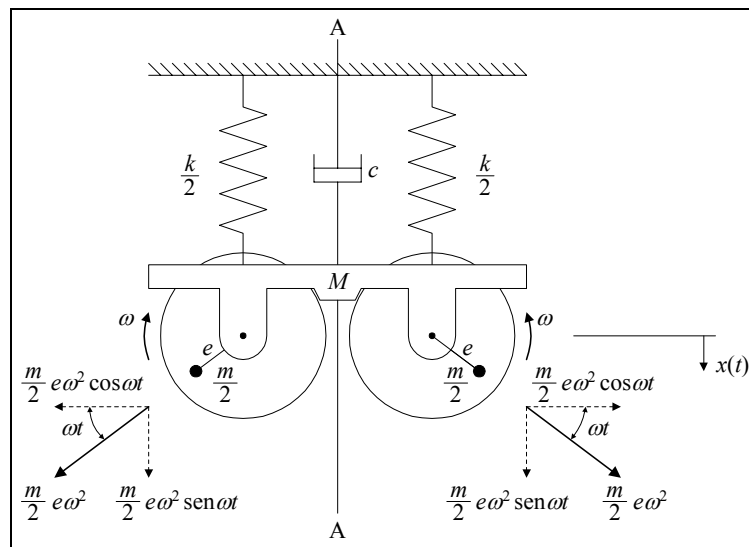


Figura 3.18 - Massas rotativas desbalanceadas.

A solução particular de (3.73) tem a forma

$$x_p(t) = X \text{ sen}(\omega t - \phi) = \text{Im} \left[\frac{m e}{M} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \tag{3.74}$$

Pela semelhança com a eq. (3.44) a solução pode ser obtida por analogia fazendo $F_0 = me\omega^2$ de forma que a amplitude será obtida de (3.49a) como

$$X = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{me}{M} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(i\omega)| = \frac{me}{M} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.75a)$$

com

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - M\omega^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1-r^2} \right) \quad (3.75b)$$

obtido de (3.49b), sendo $\omega_n = \sqrt{k/M}$.

O comportamento de X em função da relação de frequências r é mostrado na Fig. 3.16, de onde podem ser feitas algumas observações:

1 - Todas as curvas apresentam amplitudes nulas para frequências nulas. Isto acontece porque a força excitadora, que é uma força centrífuga, tem amplitude proporcional ao quadrado da frequência sendo, portanto, nula quando a frequência é zero.

2 - Em altas frequências ($r \gg 1$) a relação $\frac{MX}{me} \rightarrow 1$ para qualquer fator de amortecimento mostrando que, nesta faixa de frequências, o amortecimento não é eficiente em diminuir os níveis vibratórios em sistemas com desbalanceamento rotativo.

3 - O valor máximo $\left(\frac{MX}{me} \right)_{max}$ é obtido quando $\frac{d}{dr} \left(\frac{MX}{me} \right) = 0$ o que se verifica para $r = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$ que é

sempre maior que a unidade, ao contrário do que acontece com os sistemas sob excitação harmônica com forças com amplitude independente da frequência.

Exemplo 3.4 - O diagrama esquemático de uma turbina de água tipo Francis está mostrado na Fig. 3.19, na qual a água flui de A para as lâminas B e caem no conduto C . O rotor tem uma massa de 250 kg e um desbalanceamento (me) de 5 kg.mm. A folga radial entre o rotor e o estator é 5 mm. A turbina opera na faixa de velocidades entre 600 e 6000 rpm. O eixo de aço que suporta o rotor pode ser assumido como engastado nos mancais (livre para girar). Determinar o diâmetro do eixo de forma que o rotor não entre em contato com o estator em todas as velocidades de operação da turbina. Assumir que o amortecimento é pequeno.

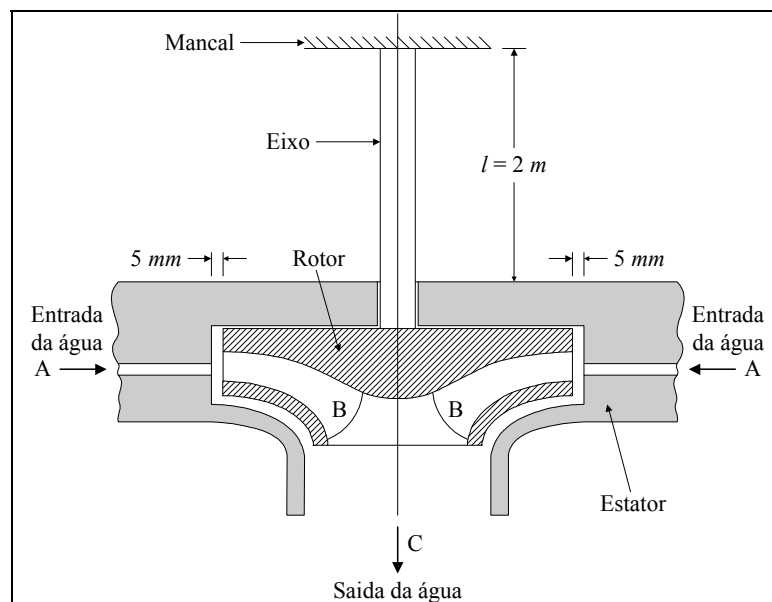


Figura 3.19 - Turbina de água tipo Francis.

Solução: Como o amortecimento é desprezível, (3.75a) torna-se

$$X = \frac{me\omega^2}{k - M\omega^2} = \frac{me\omega^2}{k(1-r^2)} \quad (a)$$

A frequência é determinada pela faixa de velocidades de operação da turbina

$$600 \text{ rpm} \Rightarrow \omega = 600 \times \frac{2\pi}{60} = 20\pi \text{ rad/s} = 62,8 \text{ rad/s}$$

$$6000 \text{ rpm} \Rightarrow \omega = 6000 \times \frac{2\pi}{60} = 200\pi \text{ rad/s} = 628 \text{ rad/s}$$

A frequência natural do sistema é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{k}{250}} \quad (\text{b})$$

São duas soluções que satisfazem o problema apresentado. Em uma delas a faixa de frequências de operação se localiza inteiramente abaixo da frequência natural do sistema enquanto que na outra a faixa de operação está acima da frequência natural.

Caso 1 - Para que a faixa de frequências de operação fique abaixo da frequência natural é necessário que a maior frequência da faixa, $\omega = 200\pi \text{ rad/s}$, seja inferior a esta. Aqui vamos estabelecer um limite de segurança de 20%, ou seja, $\omega_{max} = 1,2 \times 200\pi = 240\pi \text{ rad/s}$. Aplicando a expressão (a) tem-se

$$0,005 = \frac{0,005 \times (240\pi)^2}{k - 250 \times (240\pi)^2} \Rightarrow k = (1 + 250) \times (240\pi)^2 = 1,43 \times 10^8 \text{ N/m}$$

A rigidez do eixo sob flexão é

$$k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3E \left(\frac{\pi d^4}{64} \right)}{l^3} \quad (\text{c})$$

de onde se obtém o diâmetro

$$d^4 = \frac{64kl^3}{3\pi E} \quad (\text{d})$$

que, para este caso, resulta

$$d^4 = \frac{64 \times 1,43 \times 10^8 \times 2,0^3}{3\pi \times 2,07 \times 10^{11}} = 3,74 \times 10^{-2} \text{ m}^4 \Rightarrow d = 0,440 \text{ m}$$

Neste caso, a frequência natural, dada na expressão (b), será igual a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{250}} = \sqrt{\frac{1,48 \times 10^8}{250}} = 755 \text{ rad/s}$$

superior à maior frequência da faixa de operação.

Caso 2 - Para que a faixa de frequências de operação fique acima da frequência natural é necessário que a menor frequência da faixa, $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$, seja superior a esta. Estabelecendo novamente um limite de segurança de 20%, ou seja, $\omega_{min} = 0,8 \times 20\pi = 16\pi \text{ rad/s}$. Para que a faixa de frequências fique acima da frequência natural deve-se trocar o sinal do denominador a expressão (a), para que a amplitude continue sendo positiva. Resulta, então em

$$X = \frac{me\omega^2}{M\omega^2 - k} \quad (\text{e})$$

Aplicando a este caso

$$0,005 = \frac{0,005 \times (16\pi)^2}{250 \times (16\pi)^2 - k} \Rightarrow k = (250 - 1) \times (16\pi)^2 = 6,29 \times 10^5 \text{ N/m}$$

O diâmetro é obtido pela aplicação da expressão (d), resultando

$$d^4 = \frac{64 \times 6,29 \times 10^5 \times 2,0^3}{3\pi \times 2,07 \times 10^{11}} = 1,65 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \Rightarrow d = 0,113 \text{ m}$$

Neste caso, a frequência natural, dada na expressão (b), será igual a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{250}} = \sqrt{\frac{6,29 \times 10^5}{250}} = 50,2 \text{ rad / s}$$

inferior à menor frequência da faixa de operação.

Em ambos os casos as soluções encontradas atendem os requisitos dinâmicos apresentados. O valor escolhido para o diâmetro deve atender os demais requisitos de projeto.