

## Unidade 4 - Vibrações Forçadas sob Condições Gerais

### 4.1 - Introdução

Na Unidade 3, foi estudada a vibração forçada de sistemas de um grau de liberdade sob a ação de forças harmônicas. Neste capítulo, este estudo será estendido para forças de qualquer natureza. Inicialmente será estudada a atuação de forças periódicas que são combinações de forças harmônicas associadas através das Séries de Fourier que, em sistemas lineares, podem ser consideradas como várias forças harmônicas atuando sobre o sistema e a resposta pode ser obtida utilizando o Princípio da Superposição dos Efeitos. Para a determinação da resposta a forças não periódicas, conhecida como *resposta transiente*, serão utilizadas ferramentas matemáticas como a Integral de Convolução (ou Integral de Duhamel) e a Transformada de Laplace. O conceito de *espectro de resposta* também será abordado nesta Unidade. Em todos os casos o sistema será de um grau de liberdade com amortecimento viscoso.

### 4.2 - Resposta a Uma Força Periódica

Uma força periódica pode ser expressa em Séries de Fourier na forma

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \quad (4.1)$$

com

$$a_j = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos j\omega t \, dt \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_j = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin j\omega t \, dt \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

onde  $\tau = 2\pi/\omega$  é o período da função periódica.

A equação do movimento do sistema que sofre a ação de uma força periódica é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \quad (4.3)$$

Utilizando-se o Princípio da Superposição dos Efeitos a eq. (4.3) pode ser decomposta nas equações

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = \frac{a_0}{2}$$

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t$$

$$m\ddot{x}_3 + c\dot{x}_3 + kx_3 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \quad (4.4)$$

e sua solução particular  $x_p(t) = x_{1p}(t) + x_{2p}(t) + x_{3p}(t)$ , em que

$$x_{1p}(t) = \frac{a_0}{2k}$$

$$x_{2p}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_j}{k}\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j)$$

$$x_{3p}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{b_j}{k}\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j) \quad (4.5)$$

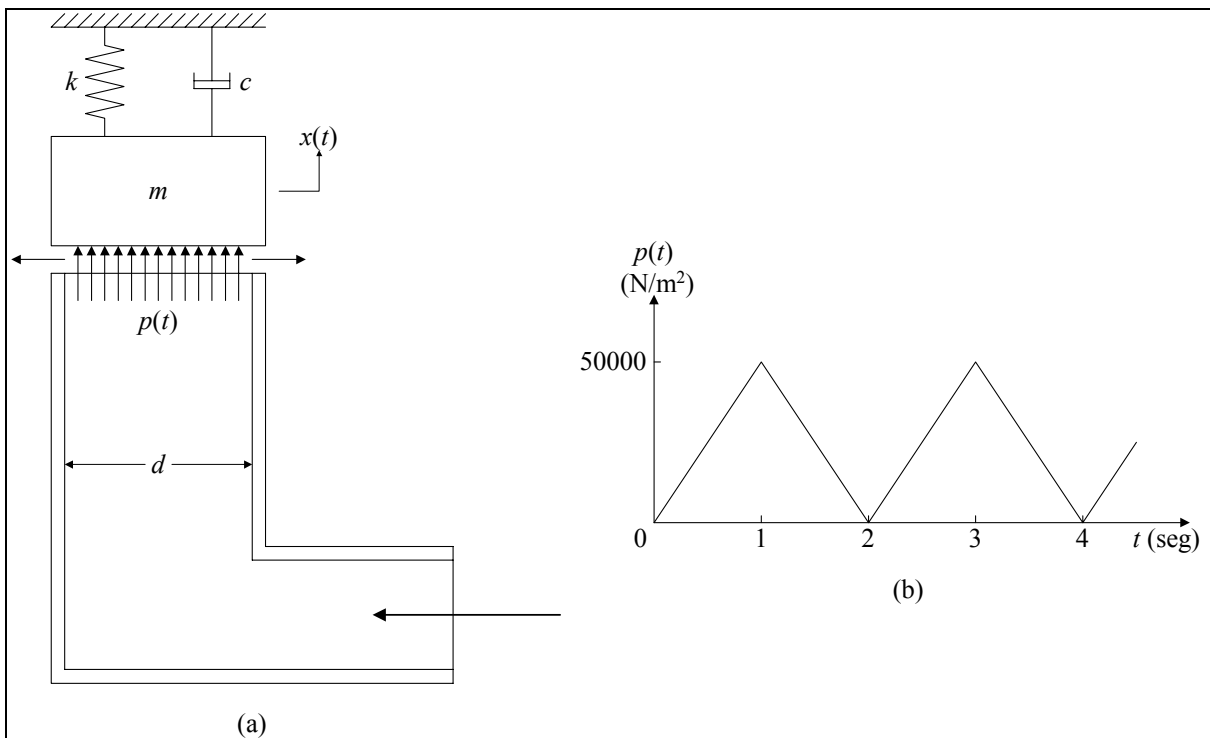
com  $\phi_j = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right)$ ,  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$  e  $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$  (frequência fundamental)

A resposta de regime permanente do sistema (ou solução particular da equação diferencial) é

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_j}{k}\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{b_j}{k}\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j) \quad (4.6)$$

Os denominadores dos segundo e terceiro termos da eq. (4.6) se aproximam de zero quando o amortecimento é pequeno e  $j\omega = \omega_n$  o que implicará em grandes amplitudes de vibração. Isto descortina a possibilidade do fenômeno da ressonância acontecer não somente quando a frequência fundamental for igual à frequência natural do sistema mas, também, quando os múltiplos desta frequência fundamental (chamados de *frequências harmônicas*) forem também iguais à frequência natural do sistema de um grau de liberdade.

**Exemplo 4.1** - No estudo de vibração de válvulas usadas em sistemas de controle hidráulico, a válvula e a sua haste elástica são modelados como um sistema massa-mola como mostra a Fig. 4.1a. Além das forças de mola e amortecimento, há uma força da pressão fluida na válvula que varia com a abertura da mesma. Encontrar a resposta de regime permanente da válvula quando a pressão na câmara varia como indicado na Fig. 4.1b. Assumir que  $k = 2500$  N/m,  $c = 10$  N.s/m e  $m = 0,25$  kg. O diâmetro da tubulação é 50 mm.



**Figura 4.1** - Válvula sob pressão periódica.

**Solução:** A força exercida sobre a válvula, resultante da pressão fluida é dada por

$$F(t) = A p(t)$$

em que  $A$  é a área da seção vazada da câmara, dada por

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 0,05^2}{4} = 6,25 \times 10^{-4} \pi \text{ m}^2$$

Da Fig. 4.1b,  $\tau = 2$  s e  $\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{2} = \pi$  rad/s

A força atuante na válvula é obtida pela representação da função em Séries de Fourier, na forma

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t$$

Da Fig. 4.1b, a força externa pode ser dada como

$$F(t) = \begin{cases} 50000At & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 50000A(2-t) & \text{para } \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau \end{cases}$$

Os coeficientes  $a_j$  são obtidos por

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^1 50000 A t dt + \int_1^2 50000 A (2-t) dt = 50000 A$$

$$a_j = \frac{2}{2} \int_0^1 50000 A t \cos j\pi t dt + \int_1^2 50000 A (2-t) \sin j\pi t dt$$

onde as integrais são resolvidas por partes resultando em

$$a_j = \begin{cases} -\frac{2 \times 10^5 A}{j^2 \pi^2} & \text{para } j \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } j \text{ par} \end{cases}$$

A função mostrada na Fig. 4.1b é uma *função par* ( $f(t) = f(-t)$ ), o que a caracteriza como uma função que é representada por uma série exclusivamente de cossenos. Desta forma os coeficientes  $b_j$  são nulos. Uma *função ímpar* ( $f(t) = -f(-t)$ ) é representada por uma série de senos e possui os coeficientes  $a_j$  nulos.

A força é, então, dada por

$$F(t) = 25000 A - \frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos j\omega t \quad \text{para } j \text{ ímpar}$$

A resposta de regime permanente é

$$x_p(t) = \frac{25000 A}{k} - \frac{2 \times 10^5 A}{k\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1/j^2}{\sqrt{(1-j^2 r^2)^2 + (2\zeta j r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) \quad \text{para } j \text{ ímpar}$$

Se a frequência natural é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2500}{0,25}} = 100 \text{ rad/s}$$

A frequência fundamental da força periódica é  $\omega = \pi$  rad/seg, então

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\pi}{100} = 0,0314$$

O fator de amortecimento é obtido a partir dos parâmetros do sistema por

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{10}{2 \times 0,25 \times 100} = 0,2$$

Os ângulos de fase podem ser obtidos por

$$\phi_j = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta j r}{1-j^2 r^2} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{2 \times 0,2 \times 0,0314 j}{1 - (0,0314)^2 j^2} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{0,0126 j}{1 - 0,000987 j^2} \right)$$

e a resposta de regime permanente do sistema será dada por

$$x_p(t) = 0,0196 - 0,0159 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(j\pi t - \phi_j)}{j^2 \sqrt{(1 - 0,000987 j^2)^2 + (0,000158 j)^2}} \quad \text{para } j \text{ ímpar}$$

### 4.3 - Resposta a Uma Força Periódica Irregular

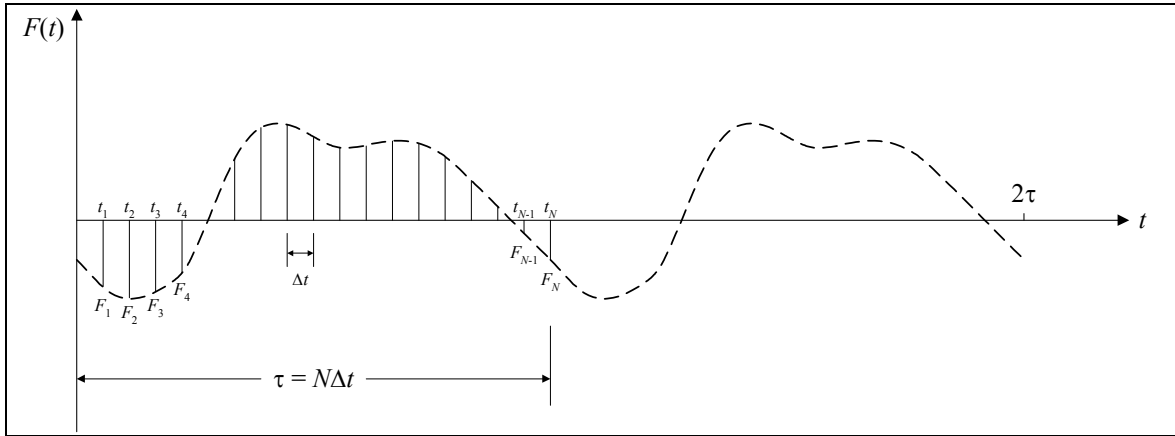


Figura 4.2 - Força periódica de forma irregular.

Quando a força atuante não possuir uma forma tal que possa ser expressa por uma expressão analítica (quando resultado de uma medição, por exemplo), a determinação dos coeficientes da Série de Fourier deverá ser realizada numericamente. Neste caso a Série assume a forma

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \\
 a_j &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \cos\left(\frac{2j\pi t}{\tau}\right) \text{ para } j = 1, 2, \dots, \infty \\
 b_j &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \text{sen}\left(\frac{2j\pi t}{\tau}\right) \text{ para } j = 1, 2, \dots, \infty
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

**Exemplo 4.2** - Encontrar a resposta de regime permanente da válvula do exemplo 4.1, se as flutuações de pressão na câmara são periódicas. Os valores da pressão são medidas com intervalos de 0,01 s (Tabela 4.1).

tempo (s)	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12
$p$ (kN/m <sup>2</sup> )	0	20	34	42	49	53	70	60	36	22	16	7	0

Tabela 4.1 - Pressão em uma válvula hidráulica.

**Solução:** Como as flutuações de pressão se repetem a cada 0,12 s, o período é  $\tau = 0,12$  s e a frequência fundamental da série de Fourier é  $\omega = 2\pi/0,12 = 52,3599$  rad/s. Como o número de valores observados em cada período é 12, da eq. (4.7) obtém-se os coeficientes

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i = \frac{2}{12} \sum_{j=1}^{12} p_i = 68167 \text{ N/m}^2 \\
 a_j &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i \cos\left(\frac{2j\pi t}{\tau}\right) = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} p_i \cos\left(\frac{2j\pi t}{0,12}\right) \text{ para } j = 1, 2, \dots, 6 \\
 b_j &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i \sin\left(\frac{2j\pi t}{\tau}\right) = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} p_i \sin\left(\frac{2j\pi t}{0,12}\right) \text{ para } j = 1, 2, \dots, 6
 \end{aligned}$$

Introduzindo estes coeficientes na expressão (4.1), a Série de Fourier é montada até a 6ª harmônica. Em virtude de se tratar de uma função discretizada, a máxima frequência harmônica presente deve ser a frequência de Nyquist, dada por

$$f_{\text{Nyquist}} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2 \times 0,01} = 50 \text{ Hz}$$

O que, sendo a frequência fundamental  $f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,12} = 8,33$  Hz, é atingido pela sexta harmônica

$$\begin{aligned}
 p(t) = & 34083,3 - 26996,0 \cos 52,3599t + 8307,80 \sin 52,3599t \\
 & + 1416,67 \cos 104,720t + 3608,44 \sin 104,720t \\
 & - 5833,33 \cos 157,080t - 2333,33 \sin 157,080t \\
 & - 583,333 \cos 209,440t + 2165,06 \sin 209,440t \\
 & - 2170,30 \cos 261,799t - 641,131 \sin 261,799t \\
 & + 166,667 \cos 314,159t + 0 \sin 314,159t
 \end{aligned}$$

N/m<sup>2</sup>

Sendo  $\omega_n = 100$  rad/seg, então  $r = 52,3599/100 = 0,523599$ , e  $\zeta = 0,2$ , do exemplo 4.1. A área da câmara de pressão é também obtida do exemplo 4.1, como  $A = 0,000625 \pi \text{ m}^2$ .

Os ângulos de fase são dados por

$$\phi_j = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta j r}{1 - j^2 r^2} \right)$$

$$\phi_1 = 0,280916 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = -1,34409 \text{ rad}$$

$$\phi_3 = -0,404565 \text{ rad}$$

$$\phi_4 = -0,242513 \text{ rad}$$

$$\phi_5 = -0,177017 \text{ rad}$$

$$\phi_6 = -0,140762 \text{ rad}$$

A resposta de regime permanente é

$$\begin{aligned}
 x_p(t) = & 0,0268 - 0,0281 \cos(52,4t - 0,281) + 0,00864 \sin(52,4t - 0,281) \\
 & + 0,00259 \cos(105t + 1,34) + 0,00659 \sin(105t + 1,34) \\
 & - 0,00287 \cos(157t + 0,405) - 0,00115 \sin(157t + 0,405) \\
 & - 0,000131 \cos(209t + 0,243) + 0,000487 \sin(209t + 0,243) \\
 & - 0,000287 \cos(262t + 0,177) - 0,0000847 \sin(262t + 0,177) \\
 & + 0,0000146 \cos(314t + 0,141) + 0 \sin(314t + 0,141) \text{ m}
 \end{aligned}$$

## 4.4 - Resposta a Uma Força Não Periódica

Para a determinação da resposta de um sistema de um grau de liberdade sob a ação de uma força não periódica, os métodos utilizados são:

1. Integral de Convolução.
2. Transformada de Laplace.
3. Transformada de Fourier.
4. Integração Numérica.

### 4.4.1 - Integral de Convolução

A Fig. 4.3b mostra uma força que tem uma determinada magnitude finita e é aplicada em um intervalo de tempo extremamente pequeno. Esta força é chamada de *força impulsiva*.

O Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento estabelece que

$$\text{Impulso} = F\Delta t = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1$$

Em um intervalo de tempo  $\Delta t$  o impulso é dado por

$$\hat{F} = \int_t^{t+\Delta t} F dt \tag{4.8}$$

O impulso unitário é definido por

$$\hat{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} F dt = F\Delta t = 1 \tag{4.9}$$

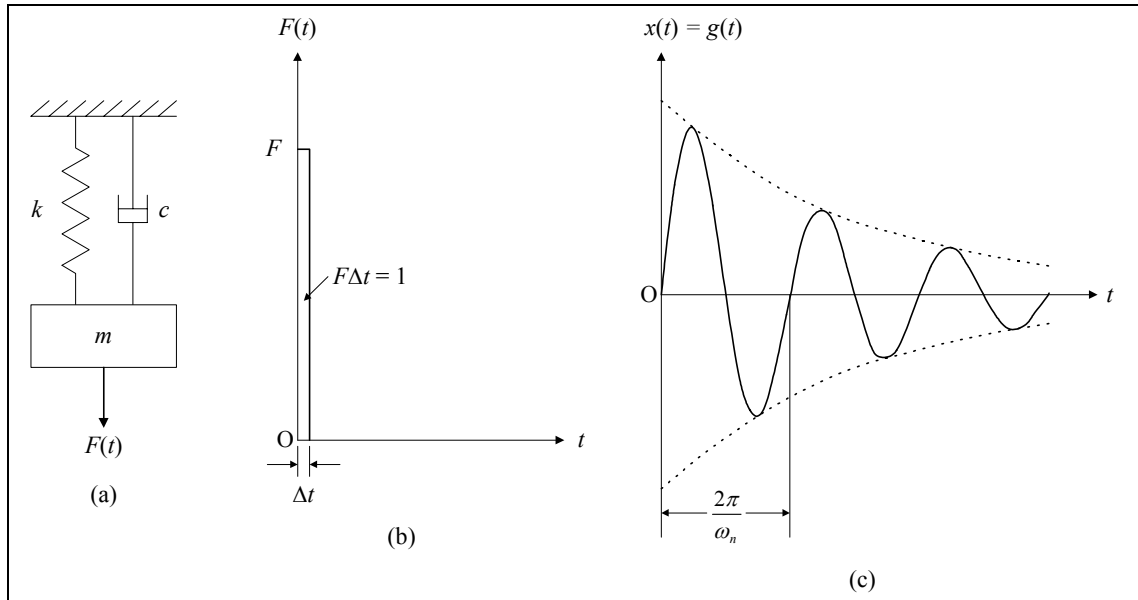


Figura 4.3 - Resposta ao impulso de sistemas de um grau de liberdade.

### Resposta ao Impulso

A equação que descreve o movimento do sistema mostrado na Fig. 4.3a é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{4.10}$$

cujas solução é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ x_0 \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \text{sen } \omega_d t \right] \tag{4.11}$$

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_d} \text{sen } \omega_d t = \hat{F} g(t) \tag{4.12}$$

Se, um instante antes do sistema sofrer a ação da força impulsiva, o mesmo estiver em repouso, pode-se dizer que em  $t = 0^- \rightarrow x(t = 0^-) = \dot{x}(t = 0^-) = 0$ , e o Princípio do Impulso e da Quantidade de Movimento permite dizer que, sob a aplicação de um impulso de magnitude unitária

$$\hat{f} = 1 = m\dot{x}(t = 0^+) - m\dot{x}(t = 0^-) \tag{4.13}$$

e como  $\dot{x}(t = 0^+) = v_0$ , então

$$\hat{f} = 1 = mv_0 \rightarrow v_0 = \frac{1}{m} \tag{4.14}$$

Como o movimento começou no repouso  $x_0 = 0$  e a resposta do sistema se torna

$$x(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \text{sen } \omega_d t = g(t) \tag{4.15}$$

que é conhecida como *função resposta ao impulso unitário*. Como o sistema é linear, a resposta a um impulso de magnitude não unitária é obtida pela multiplicação da resposta ao impulso unitário pela magnitude do impulso, resultando

Se o impulso for aplicado em um tempo  $t = \tau$ , a resposta também ficará defasada no tempo, na forma

$$x(t) = \hat{F} g(t - \tau) = \frac{\hat{F}}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t - \tau) \tag{4.16}$$

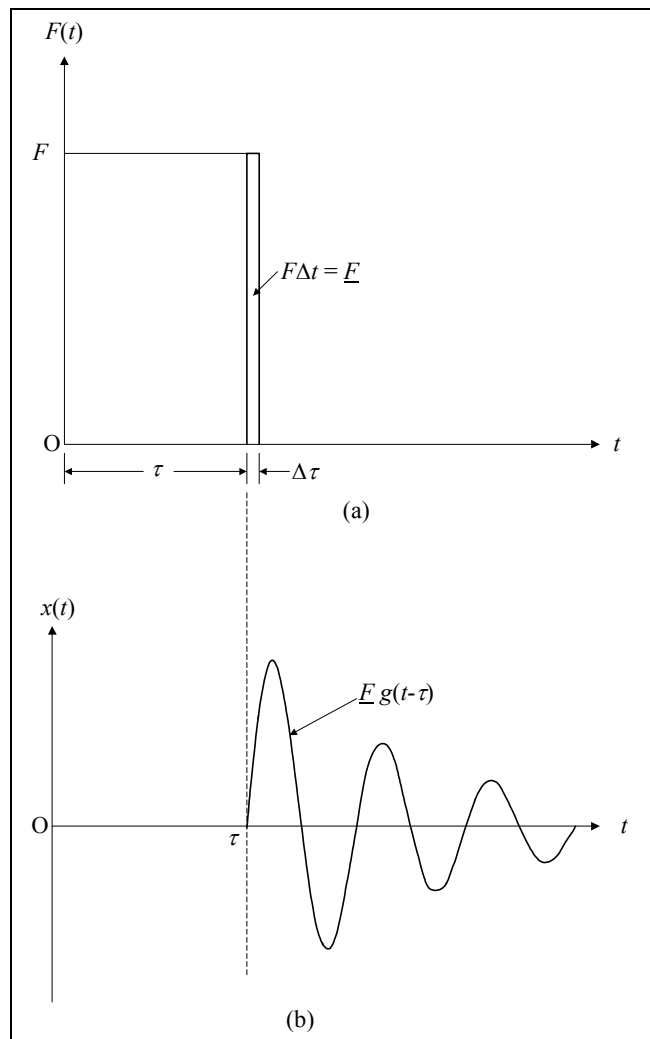


Figura 4.4 - Resposta a um impulso aplicado em  $t = \tau$ .

### Resposta a Uma Força Geral

Uma função geral pode ser considerada como uma superposição de impulsos, como mostra a Fig. 4.5.

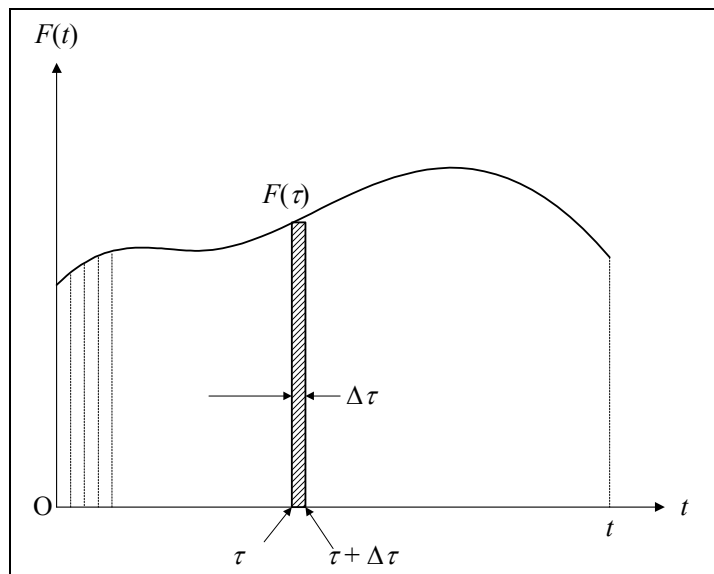


Figura 4.5 - Função geral, não periódica.

A resposta de um sistema a uma força aplicada desta forma será a soma das respostas aos impulsos aplicados ao longo do tempo. Se a resposta ao impulso unitário aplicado no tempo  $t = \tau$  é igual a  $g(t - \tau)$ , então, aplicando o Princípio da Superposição dos efeitos a resposta produzida pelo impulso  $F(\tau)\Delta\tau$ , aplicado em  $t = \tau$ , é

$$\Delta x(t) = F(\tau) \Delta \tau g(t - \tau) \tag{4.17}$$

A resposta geral é obtida pela soma das respostas parciais como

$$x(t) = \sum \Delta x(t) = \sum F(\tau) g(t - \tau) \Delta \tau \tag{4.18}$$

Levando ao limite para  $\Delta \tau \rightarrow 0$  chega-se a

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t - \tau) d\tau \tag{4.19}$$

que é conhecida como *Integral de Convolução* ou *Integral de Duhamel*. Para um sistema de um grau de liberdade com amortecimento viscoso, onde a resposta ao impulso unitário é dada na eq. (4.14), a equação (4.19) torna-se

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t - \tau) d\tau \tag{4.20}$$

### Resposta à Excitação Impulsiva na Base

Em alguns casos (um carro passando por um buraco ou uma lombada, por exemplo), a excitação na base do sistema tem características gerais, e neste caso, a equação do movimento relativo (3.69) tem sua solução modificada para

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t - \tau) d\tau \tag{4.21}$$

**Exemplo 4.3** - Uma máquina de compactação, modelada como um sistema de um grau de liberdade, é mostrada na Fig. 4.6a. A força atuante na massa  $m$  (que inclui as massas do pistão, da plataforma e do material que está sendo compactado) devido a uma aplicação súbita da pressão, pode ser idealizada como uma força degrau como mostra a Fig. 4.6b. Determinar a resposta do sistema.

**Solução:** De acordo com o mostrado na Fig. 4.6b, a força externa é igual a

$$F(\tau) = F_0$$

Introduzindo na eq. (4.20) tem-se

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F_0 e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t - \tau) d\tau$$

que é integrada por partes, resultando

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \right]$$

onde  $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$ . O movimento produzido por esta expressão está mostrado na Fig. 4.6c e se caracteriza por

ser um movimento harmônico com a posição de equilíbrio deslocada da sua posição original em  $F_0/k$ .

Se o sistema não possuir amortecimento, com  $\zeta = 0$  e  $\omega_d = \omega_n$  a resposta transforma-se em

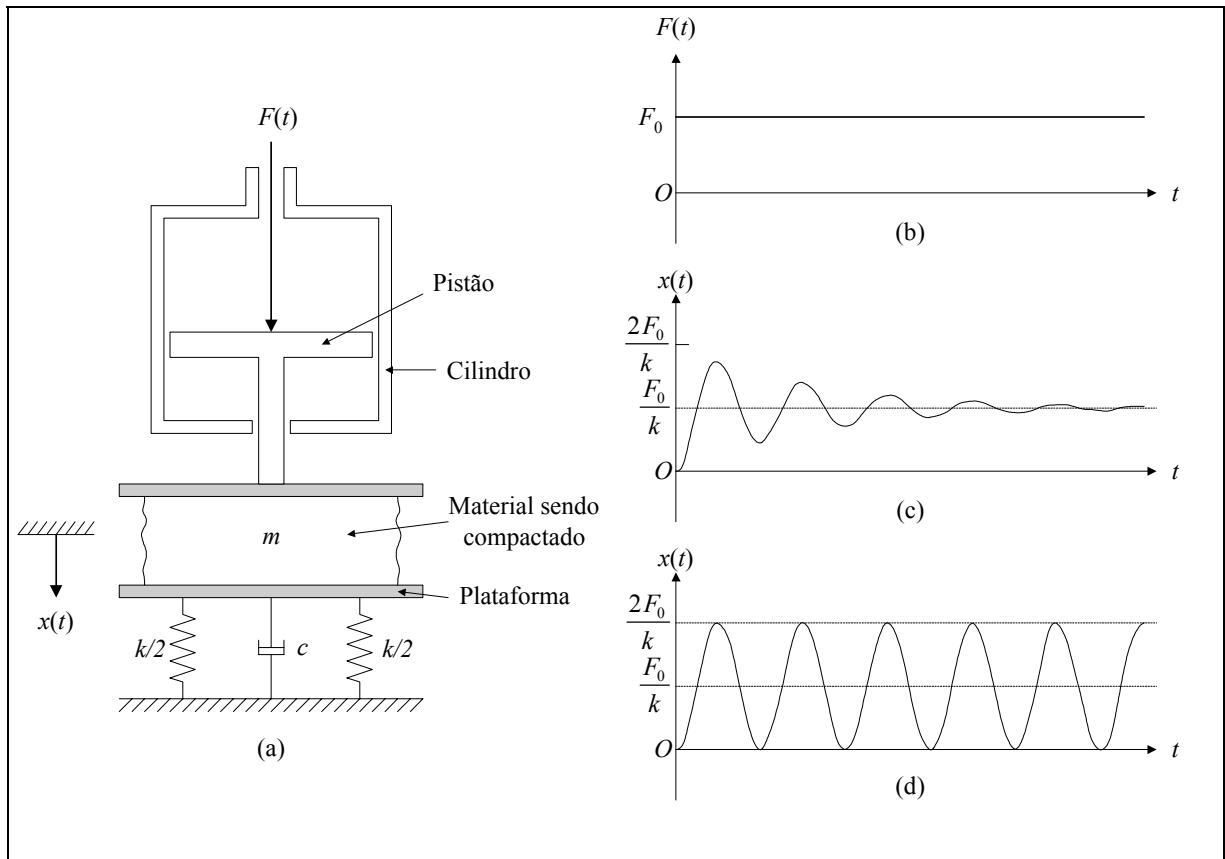
$$x(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n t]$$

em que o deslocamento máximo ocorre quando  $\cos \omega_n t = -1$  sendo

$$x_{max} = \frac{2F_0}{k}$$

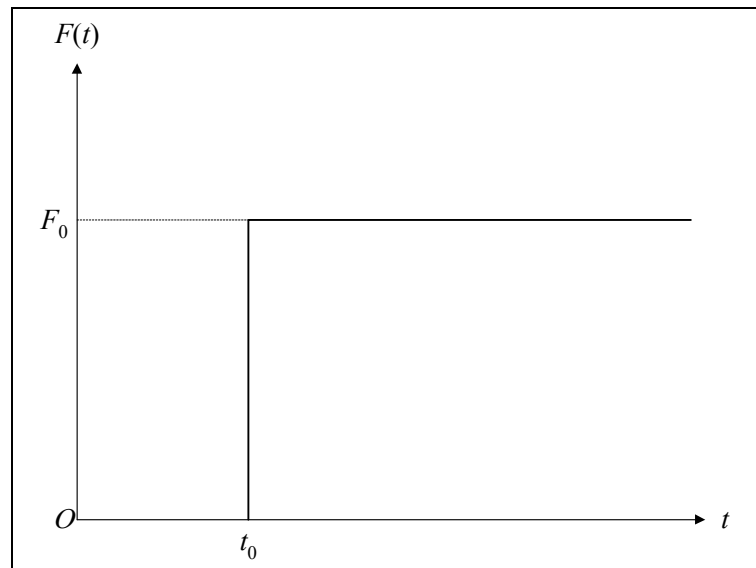
o que pode ser claramente visto na Fig. 4.6d. O movimento é harmônico com amplitude  $F_0/k$  e com a posição de equilíbrio deslocada da posição de equilíbrio original também  $F_0/k$ , de forma que o deslocamento máximo em relação ao referencial adotado, que é a posição de equilíbrio original, é o dobro deste valor.





**Figura 4.6** - Força degrau em uma máquina de compactação.

**Exemplo 4.4** - Achar a resposta da máquina de compactação mostrada na Fig. 4.6 quando a mesma está submetida à força mostrada na Fig. 4.7.



**Figura 4.7** - Força degrau com tempo de atraso.

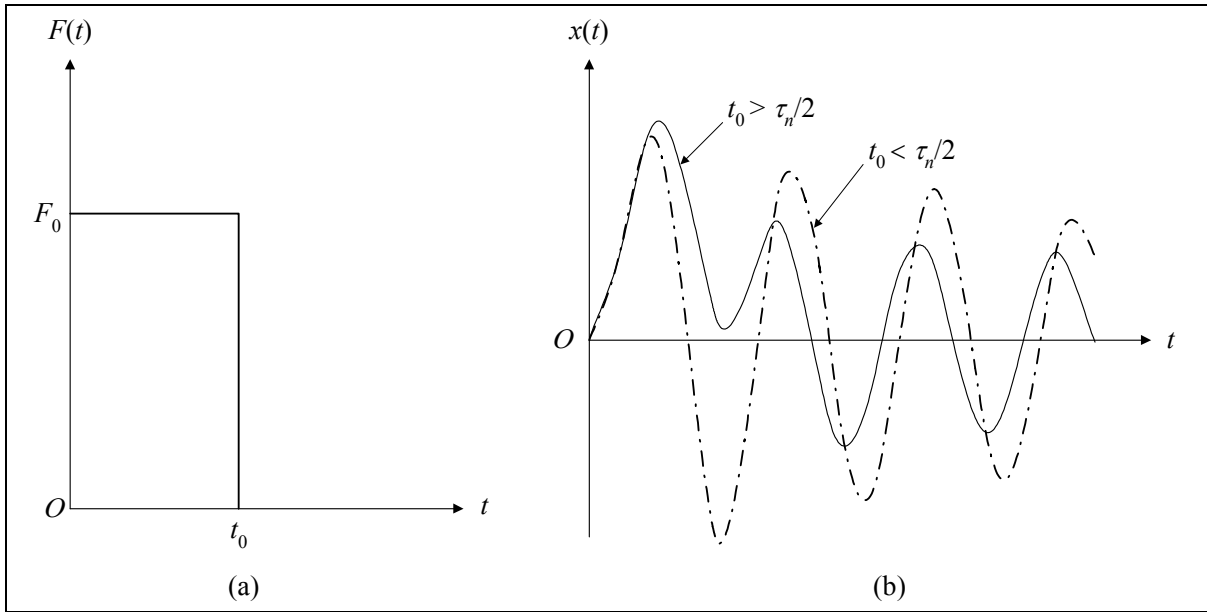
**Solução:** A solução é análoga à do exemplo 4.3, apenas substituindo  $t$  por  $t-t_0$  na eq. 4.20, resultando

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \cos[\omega_d(t-t_0) - \phi] \right\}$$

e, quando o sistema for não amortecido ( $\zeta = 0$  e  $\omega_d = \omega_n$ )

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 - \cos[\omega_n(t-t_0)] \right\}$$

**Exemplo 4.5** - Se a máquina de compactação mostrada na Fig. 4.6a está submetida a uma força constante com tempo de duração limitado  $0 \leq t \leq t_0$  (Fig. 4.8a), determinar a resposta da máquina.



**Figura 4.8** - Força pulso retangular.

**Solução:** Como o sistema é linear a força pode ser considerada como uma superposição de uma força degrau  $F_0$  aplicada em  $t = 0$  e uma outra força degrau  $-F_0$ , aplicada em  $t = t_0$ . A resposta em  $t > t_0$  será a superposição das respostas a cada uma das forças quando aplicadas isoladamente. Estas respostas foram determinadas nos exemplos 4.3 e 4.4, resultando em

$$x(t) = \frac{F_0 e^{-\zeta\omega_n t}}{k\sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ e^{\zeta\omega_n t_0} \cos[\omega_d(t-t_0) - \phi] - \cos(\omega_d t - \phi) \right\}$$

com  $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$

Para sistemas sem amortecimento a resposta é

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[ \cos \omega_n(t-t_0) - \cos \omega_n t \right]$$

**Exemplo 4.6** - Determinar a resposta da máquina de compactação mostrada na Fig. 4.9a quando for aplicada uma força que varia linearmente (Fig. 4.9b), devido ao movimento do came.

**Solução:** A equação da força aplicada, mostrada na Fig. 4.9b é

$$F(\tau) = \delta F \tau$$

onde  $\delta F$  é a taxa de crescimento da força na unidade de tempo. A equação (4.20), neste caso, torna-se

$$x(t) = \frac{\delta F}{m\omega_d} \int_0^t \tau e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t-\tau) d\tau$$

cuja integral é resolvida por partes, resultando

$$x(t) = \frac{\delta F}{k} \left\{ t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d t - \left( \frac{\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 \omega_d} \right) \text{sen } \omega_d t \right] \right\}$$

Para sistemas sem amortecimento

$$x(t) = \frac{\delta F}{\omega_n k} (\omega_n t - \text{sen } \omega_n t)$$

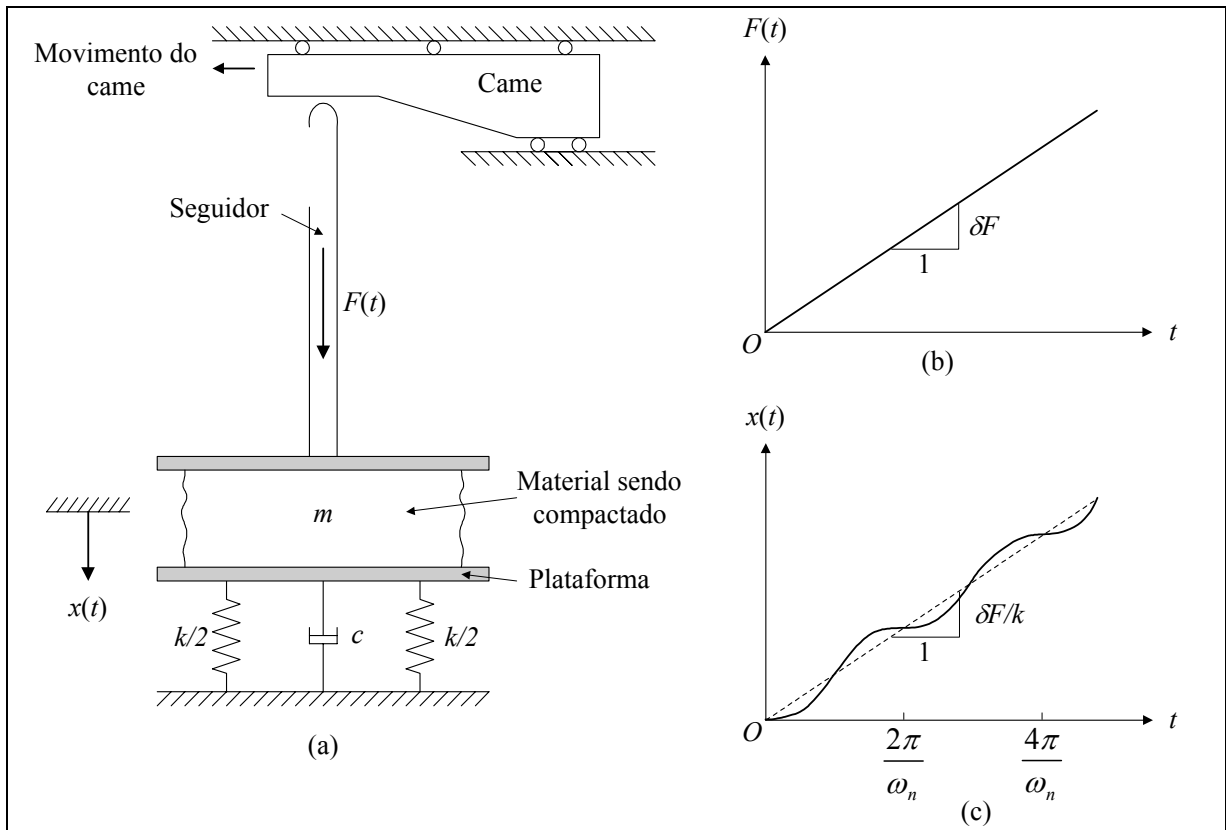


Figura 4.9 - Máquina de compactação sob força variando linearmente.

#### 4.4.2 - Transformada de Laplace

##### Definição

O método da Transformada de Laplace é aplicado para resolver equações diferenciais ordinárias, lineares, com coeficientes constantes. Apresenta como vantagens ser aplicável a qualquer tipo de função de excitação, desde que integráveis, tratar funções descontínuas sem dificuldades e levar em conta automaticamente as condições iniciais, o que é significativo quando se trata de resolver um problema do valor inicial. A definição da Transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}x(t) = \bar{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \quad (4.22)$$

onde  $s$  é chamada de *variável subsidiária*, complexa e  $e^{-st}$  é o núcleo da transformação.

##### Transformação de Derivadas

A transformada da derivada é obtida através de uma integração por partes, na forma

$$\mathcal{L} \frac{dx(t)}{dt} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dx(t)}{dt} dt = e^{-st} x(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s e^{-st}) x(t) dt = -x(0) + s \bar{x}(s) \quad (4.23)$$

onde  $x(0)$  é o valor inicial de  $x(t)$ .

A segunda derivada é obtida seguindo o mesmo caminho. Chega-se a

$$\mathcal{L} \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d^2x(t)}{dt^2} dt = -\dot{x}(0) - sx(0) + s^2 \bar{x}(s) \quad (4.24)$$

onde  $\dot{x}(0)$  é o valor inicial da derivada de  $x(t)$ .

##### Transformação de Equações Diferenciais Ordinárias

A equação diferencial do movimento de um sistema de um grau de liberdade viscosamente amortecido é

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t) \quad (4.25)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados da equação (4.25) e utilizando os resultados de (4.23) e (4.24) tem-se

$$m[s^2\bar{x}(s) - s x(0) - \dot{x}(0)] + c[s\bar{x}(s) - x(0)] + k\bar{x}(s) = \bar{F}(s) \quad (4.26)$$

Como  $c/m = 2\zeta\omega_n$ ,  $k/m = \omega_n^2$ , a equação (4.26) pode ser resolvida para se calcular a transformada de Laplace da resposta  $\bar{x}(s)$ , na forma

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \bar{F}(s) + \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} x(0) + \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dot{x}(0) \quad (4.27)$$

que é chamada *equação subsidiária* da equação diferencial. Para obter a resposta do sistema  $x(t)$ , se deve calcular a transformada inversa de Laplace do resultado da equação (4.27).

### Transformação Inversa de Laplace

A transformação inversa envolve uma integral de linha no domínio complexo de difícil solução. Por este motivo se procura transformar a função obtida na eq. (4.27) em funções que tenham a sua transformada inversa conhecida. Esta é a essência do método das frações parciais, descrito a seguir. As funções resultantes serão comparadas com funções que possuem transformadas conhecidas, relacionadas na Tabela 4.2.

Consideremos o caso em que  $\bar{x}(s)$  pode ser escrita na forma

$$\bar{x}(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (4.28)$$

onde tanto  $A(s)$  como  $B(s)$  são polinômios em  $s$ . Geralmente  $B(s)$  é um polinômio de maior ordem que  $A(s)$ . Chamando de  $s = a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) as raízes de  $B(s)$ , o polinômio pode ser escrito como

$$B(s) = (s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_k) \cdots (s - a_n) = \prod_{k=1}^n (s - a_k) \quad (4.29)$$

onde  $\prod$  é o símbolo do produto. As raízes  $s = a_k$  são conhecidas como pólos simples de  $\bar{x}(s)$ . A expansão em frações parciais de (4.28) tem a forma

$$\bar{x}(s) = \frac{c_1}{s - a_1} + \frac{c_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{c_k}{s - a_k} + \cdots + \frac{c_n}{s - a_n} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s - a_k} \quad (4.30)$$

onde os coeficientes  $c_k$  são dados pela fórmula

$$c_k = \lim_{s \rightarrow a_k} [(s - a_k) \bar{x}(s)] = \left. \frac{A(s)}{B'(s)} \right|_{s=a_k} \quad (4.31)$$

onde  $B'(s)$  é a derivada de  $B(s)$  em relação a  $s$ .

Como

$$\mathcal{L} e^{a_k t} = \frac{1}{s - a_k} \quad (4.32)$$

segue-se que

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s - a_k} = e^{a_k t} \quad (4.33)$$

onde (4.32) e (4.33) constituem um par de Laplace. Considerando as equações (4.31) e (4.33) a transformada inversa de  $\bar{x}(s)$ , eq. (4.30), se torna

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \left. \frac{A(s)}{B'(s)} \right|_{s=a_k} e^{a_k t} = \sum_{k=1}^n \frac{A(s)}{B'(s)} e^{st} \Big|_{s=a_k} \quad (4.34)$$

Freqüentemente, é mais simples considerar a eq. (4.30) e escrever  $A(s)$  na forma

$$A(s) = c_1 \prod_{i=2}^n (s - a_i) + c_2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n (s - a_i) + \dots + c_n \prod_{i=2}^{n-1} (s - a_i) = \sum_{k=1}^n c_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (s - a_i) \quad (4.35)$$

Comparando os coeficientes de  $s^{j-1}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), em ambos os lados de (4.35), obtém-se um sistema de equações algébricas que podem ser resolvidas para a determinação dos coeficientes  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

**Integral de Convolução. Teorema de Borel.**

Considere-se duas funções  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , definidas para  $t > 0$ . Assuma-se, também, que  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  possuem transformadas de Laplace  $\bar{f}_1(s)$  e  $\bar{f}_2(s)$ , respectivamente, e considere-se a integral

$$x(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.36)$$

A função  $x(t)$ , é chamada de *convolução* das funções  $f_1$  e  $f_2$  no intervalo  $0 < t < \infty$ . O limite superior das integrais em (4.36) são intercambiáveis porque  $f_2(t - \tau) = 0$  para  $\tau > t$ , que é o mesmo que  $t - \tau < 0$ . Transformando ambos os lados da eq. (4.36), obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left[ \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt = \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-st} f_2(t - \tau) dt \\ &= \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-s\lambda} f_2(\lambda - \tau) d\lambda \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde o limite inferior da segunda integral mudou porque  $f_2(t - \tau) = 0$  para  $\tau > t$ .

A seguir, se introduz a transformação  $t - \tau = \lambda$  na segunda integral, e observando que para  $t = \tau$  tem-se  $\lambda = 0$ , escrevendo-se

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-s\lambda} f_2(\lambda - \tau) d\lambda = \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\lambda)} f_2(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-s\lambda} f_2(\lambda) d\lambda = \bar{f}_1(s) \bar{f}_2(s) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Das equações (4.36) e (4.38), segue-se que

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \bar{x}(s) = \mathcal{L}^{-1} \bar{f}_1(s) \bar{f}_2(s) \quad (4.39)$$

então

$$x(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (4.40)$$

A segunda integral na eq. (4.40) é válida porque não importa de que maneira ocorre o acréscimo de tempo.

**Teorema de Borel**

A transformação inversa de Laplace do produto de duas transformadas é igual à convolução das suas transformadas inversas.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE		
	$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$	
	$f(t)$	
1	$c_1 \bar{f}(s) + c_2 \bar{g}(s)$	$c_1 f(t) + c_2 g(t)$
2	$\bar{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(a \cdot t)$
3	$\bar{f}(s) \bar{g}(s)$	$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$
4	$s^n \bar{f}(s) - \sum_{j=1}^n s^{n-j} \left. \frac{d^{j-1} f(t)}{dt^{j-1}} \right _{t=0}$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$
5	$\frac{1}{s^n} \bar{f}(s)$	$\int_0^t \dots \int_0^t f(\tau) d\tau \dots d\tau$
6	$\bar{f}(s + a)$	$e^{-at} f(t)$

7	1	$\delta(t)$ = degrau unitário aplicado em $t = 0$
8	$\frac{e^{-as}}{s}$	$u(t)$ = impulso unitário aplicado em $t=a$
9	$\frac{1}{s^n}$ ( $n = 1,2, \dots$ )	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
10	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$
11	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$
12	$\frac{1}{(s+a)^n}$ ( $n = 1,2, \dots$ )	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$
13	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$
14	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{-at} + at - 1)$
15	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \text{sen } at$
16	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \text{senh } at$
17	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\text{cos } at$
18	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\text{cosh } at$
19	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \text{cos } at)$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^3}(at - \text{sen } at)$
21	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\text{sen } at - at \text{cos } at)$
22	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \text{sen } at$
23	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \text{cos } at$
24	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
25	$\frac{s+a}{s^2}$	$1 + at$
26	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at - (1 - e^{-at})$
27	$\frac{s+b}{s(s+a)}$	$\frac{b}{a} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{a}{b} \right) e^{-at} \right\}$
28	$\frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$	$1 - \text{cos } at$
29	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t$
30	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$-\frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t - \phi_1)$

31	$\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi_1)$
32	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi_1)$
33	$\frac{s + \zeta\omega_n}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi_1)$

**Tabela 4.2** - Transformadas de Laplace.

**Exemplo 4.7** - Achar a resposta da máquina de compactação do exemplo 4.5, assumindo  $\zeta < 1$ , utilizando a transformada de Laplace.

**Solução:** A força aplicada pode ser escrita na forma

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \rightarrow 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \rightarrow t > t_0 \end{cases}$$

A transformada de Laplace de  $F(t)$  é obtida como

$$\bar{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} F_0 dt = F_0 \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{F_0}{s} [-e^{-st}]_0^{t_0} = \left( \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} \right) F_0$$

Utilizando (4.27), a transformada da resposta será

$$\bar{x}(s) = \frac{F_0(1 - e^{-t_0 s})}{ms(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} x(0) + \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dot{x}(0)$$

A transformadas inversas do segundo e do terceiro termo da equação são obtidas utilizando diretamente os resultados 31 e 29 da Tabela 4.2. A transformada inversa do primeiro termo é obtida do resultado 32 da mesma Tabela 4.2 considerando que a multiplicação da transformada de uma função por  $e^{-as}$  implica no deslocamento  $a$  da função no domínio do tempo. Então a transformada inversa torna-se

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi_1) \right] \\ & - \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}(t-t_0) + \phi_1] \right\} \\ & - \frac{x_0}{\omega_n^2} \left[ \frac{\omega_n^2 e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_1) \right] \\ & + \left( \frac{2\zeta x_0}{\omega_n} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n^2} \right) \left[ \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] \end{aligned}$$

onde  $\phi_1 = \cos^{-1}(\zeta)$ , e a resposta da máquina de compactação pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{F_0}{m\omega_n^2 \sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ -e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi_1) + e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \text{sen}[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}(t-t_0) + \phi_1] \right\} \\ & - \frac{x_0}{\omega_n^2 \sqrt{1-\zeta^2}} \left[ e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_1) \right] + \frac{(2\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0)}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \left[ e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] \end{aligned}$$

### 4.4.3 - Integral de Fourier

Na seção 4.2 viu-se que uma função periódica pode ser representada por uma série de Fourier, que são séries infinitas de funções harmônicas de frequências  $j\omega$  onde  $\omega = 2\pi/\tau$  é a frequência fundamental. Fazendo o período  $\tau$  se aproximar do infinito, de forma que o primeiro intervalo de tempo se alongue sem limites, a função se torna não periódica. Desta maneira, o intervalo de frequência tende para zero de forma que as frequências harmônicas, originalmente discretas se tornam contínuas. Nesta situação as séries de Fourier se tornam integrais de Fourier.

Uma função periódica pode ser representada por séries de Fourier na sua forma complexa

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j e^{ij\omega t} \quad (4.41)$$

onde os coeficientes  $C_j$  são obtidos por

$$C_j = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-ij\omega t} dt, \quad \text{para } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.42)$$

Introduzindo a notação  $j\omega = \omega_j$ ,  $(j+1)\omega - j\omega = \omega = \Delta\omega_j$ , as equações (4.41) e (4.42) se tornam

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} (\tau C_j) e^{i\omega_j t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\tau C_j) e^{i\omega_j t} \Delta\omega_j \quad (4.43)$$

$$\tau C_j = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-ij\omega t} dt \quad (4.44)$$

Fazendo o período tender ao infinito  $\tau \rightarrow \infty$ , a variável  $\omega_j$  se transforma na variável contínua  $\omega$  e, levando ao limite, se substitui a soma pela integral e se obtém

$$f(t) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \Delta\omega_j \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\tau C_j) e^{i\omega_j t} \Delta\omega_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.45)$$

$$F(\omega) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \Delta\omega_j \rightarrow 0}} (\tau C_j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.46)$$

A equação (4.45) implica que uma função arbitrária  $f(t)$  pode ser descrita por uma integral representando contribuições de componentes harmônicos possuindo um espectro de frequência contínuo entre  $-\infty$  e  $+\infty$ . A quantidade  $F(\omega) d\omega$  pode ser considerada como uma contribuição das harmônicas que estão no intervalo entre  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  à função  $f(t)$ .

A equação (4.46) é conhecida como a *Transformada de Fourier de  $f(t)$* , de forma que as integrais

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.47)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.48)$$

representam um par de transformadas de Fourier, onde  $f(t)$  é conhecida como a *Transformada Inversa de  $F(\omega)$* . As equações (4.47) e (4.48) contém a informação sobre a composição em frequência da função  $f(t)$ , que não é periódica.

Se a eq. (4.41) representa uma função excitadora, então a resposta de regime permanente do sistema pode ser escrita na forma

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H_j C_j e^{ij\omega t} \quad (4.49)$$

onde  $H_j$  é a resposta em frequência complexa associada à frequência  $j\omega$ . Seguindo um procedimento similar ao utilizado para  $f(t)$ , conclui-se que a resposta do sistema a uma excitação arbitrária também pode ser escrita na forma de um par de transformadas de Fourier, como segue

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.50)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.51)$$

onde a transformada de Fourier da resposta é

$$X(\omega) = H(\omega) F(\omega) \quad (4.52)$$

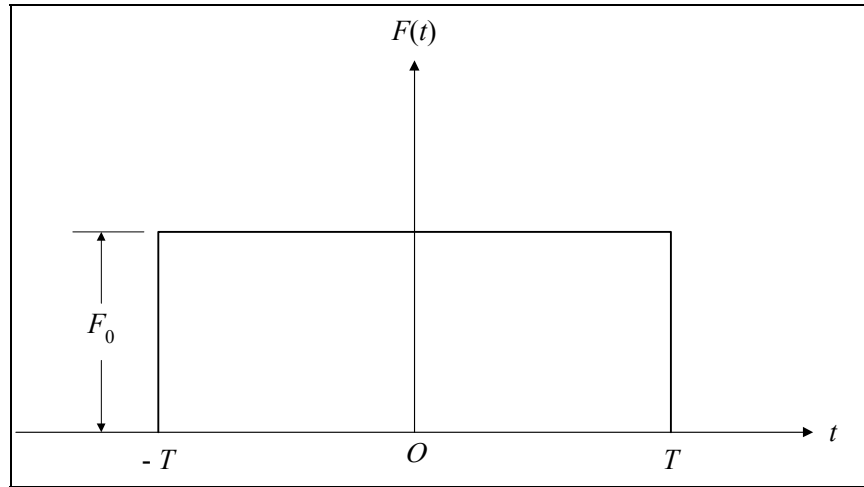
que é simplesmente o produto da resposta em frequência complexa pela transformada de Fourier da função excitadora.

Normalmente a transformada de Fourier não é muito utilizada para calcular a resposta do sistema pela equação (4.51), pois freqüentemente a sua solução exige integrações no plano complexo o que pode se tornar extremamente complicado. A integral de convolução e a transformada de Laplace são mais fáceis de se utilizar nestes casos. Entretanto, quando se pretende analisar o comportamento no domínio da frequência a integral (4.50) é normalmente



fácil de ser obtida (quando a função cumpre as condições de existência da integral) e fornece uma ferramenta de análise muito útil. Existe um algoritmo para calcular a integral (4.50) de forma rápida conhecido como Fast Fourier Transform (FFT) de larga utilização na engenharia.

**Exemplo 4.8** - Calcular a resposta de um sistema de um grau de liberdade não amortecido à excitação na forma de um pulso retangular mostrado na Fig. 4.10, usando o método da transformada de Fourier. Fazer o gráfico dos espectros de frequência das funções excitadora e de resposta.



**Figura 4.10-** Função pulso retangular.

**Solução:** A função excitadora pode ser escrita mostrada na Fig. 4.10 pode ser escrita como

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{para } -T < t < T \\ 0 & \text{para } t < -T, t > T \end{cases} \quad (a)$$

Como  $f(t)$  possui apenas descontinuidades finitas no intervalo, a sua integral existe sendo possível escrever a sua transformada de Fourier na forma

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F_0 \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = F_0 \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) \quad (b)$$

Para sistemas sem amortecimento, a resposta em frequência complexa, eq. (3.49), se torna

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (c)$$

Inserindo as equações (b) e (c) na eq. (4.52) tem-se

$$X(\omega) = H(\omega) F(\omega) = \frac{F_0}{k} \frac{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}{i\omega \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} \quad (d)$$

Então a resposta pode ser escrita na forma da transformada inversa de Fourier como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}{\omega \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} e^{i\omega t} d\omega \quad (e)$$

Antes de tentar calcular a integral acima, é conveniente considerar o seguinte desenvolvimento em frações parciais:

$$\frac{1}{\omega \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2(\omega - \omega_n)} - \frac{1}{2(\omega + \omega_n)} \quad (f)$$

de forma que a eq. (e) se torna

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2(\omega - \omega_n)} - \frac{1}{2(\omega + \omega_n)} \right] \left[ e^{i\omega(t+T)} - e^{i\omega(t-T)} \right] d\omega \quad (g)$$

O cálculo das integrais envolvidas na eq. (g) exige a execução de integrais de contorno no plano complexo. Como isto requer conhecimento matemático superior (ao nível exigido para um engenheiro), aqui são apresentados apenas os resultados

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\lambda}}{\omega} d\omega &= \begin{cases} 0 & \text{para } \lambda < 0 \\ 2\pi i & \text{para } \lambda > 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\lambda}}{\omega - \omega_n} d\omega &= \begin{cases} 0 & \text{para } \lambda < 0 \\ 2\pi i e^{i\omega_n t} & \text{para } \lambda > 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\lambda}}{\omega + \omega_n} d\omega &= \begin{cases} 0 & \text{para } \lambda < 0 \\ 2\pi i e^{-i\omega_n t} & \text{para } \lambda > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (h)$$

Da eq. (g), nota-se que  $\lambda$  assume os valores  $t + T$  e  $t - T$ . Deve-se, portanto, distinguir entre os domínios de tempos definidos por  $t + T < 0$  e  $t - T < 0$ ,  $t + T > 0$  e  $t - T < 0$ ,  $t + T > 0$  e  $t - T > 0$ , que são os mesmo domínios definidos por  $t < -T$ ,  $-T < t < T$ , e  $t > T$ , respectivamente. Inserindo as integrais (h) com os valores apropriados de  $\lambda$  obtém-se

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \quad \text{para } t < -T \\ x(t) &= \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\pi i} \left[ 2\pi i - \frac{1}{2} 2\pi i e^{i\omega_n(t+T)} - \frac{1}{2} 2\pi i e^{-i\omega_n(t+T)} \right] = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n(t+T)] \quad \text{para } -T < t < T \\ x(t) &= \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left[ 2\pi i - \frac{1}{2} 2\pi i e^{i\omega_n(t+T)} - \frac{1}{2} 2\pi i e^{-i\omega_n(t+T)} \right] - \left[ 2\pi i - \frac{1}{2} 2\pi i e^{i\omega_n(t-T)} - \frac{1}{2} 2\pi i e^{-i\omega_n(t-T)} \right] \right\} \\ &= \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n(t-T) - \cos \omega_n(t+T)] \quad \text{para } t > T \end{aligned} \quad (i)$$

O espectro de frequência associado a  $f(t)$  é dado pela eq. (b). Lembrando que  $(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) / 2i = \text{sen } \omega T$ , eq. (b) se torna

$$F(\omega) = \frac{2F_0}{k} \frac{\text{sen } \omega T}{\omega} \quad (j)$$

A Figura 4.11a mostra o gráfico de  $F(\omega)$  versus  $\omega$ . O espectro de frequência associado a  $x(t)$  é dado pela eq. (d). De forma similar a eq. (d) pode ser reduzida a

$$X(\omega) = \frac{2F_0}{k} \frac{\text{sen } \omega T}{\omega \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]} \quad (k)$$

A Figura 4.11b mostra o gráfico de  $X(\omega)$  versus  $\omega$ .

O método da integral de convolução é de aplicação mais simples, pois a transformação inversa de Fourier exige integração de contorno no plano complexo de difícil solução. A análise, porém, no domínio da frequência é de larga aplicação na engenharia, sendo a principal ferramenta de análise de vibrações.

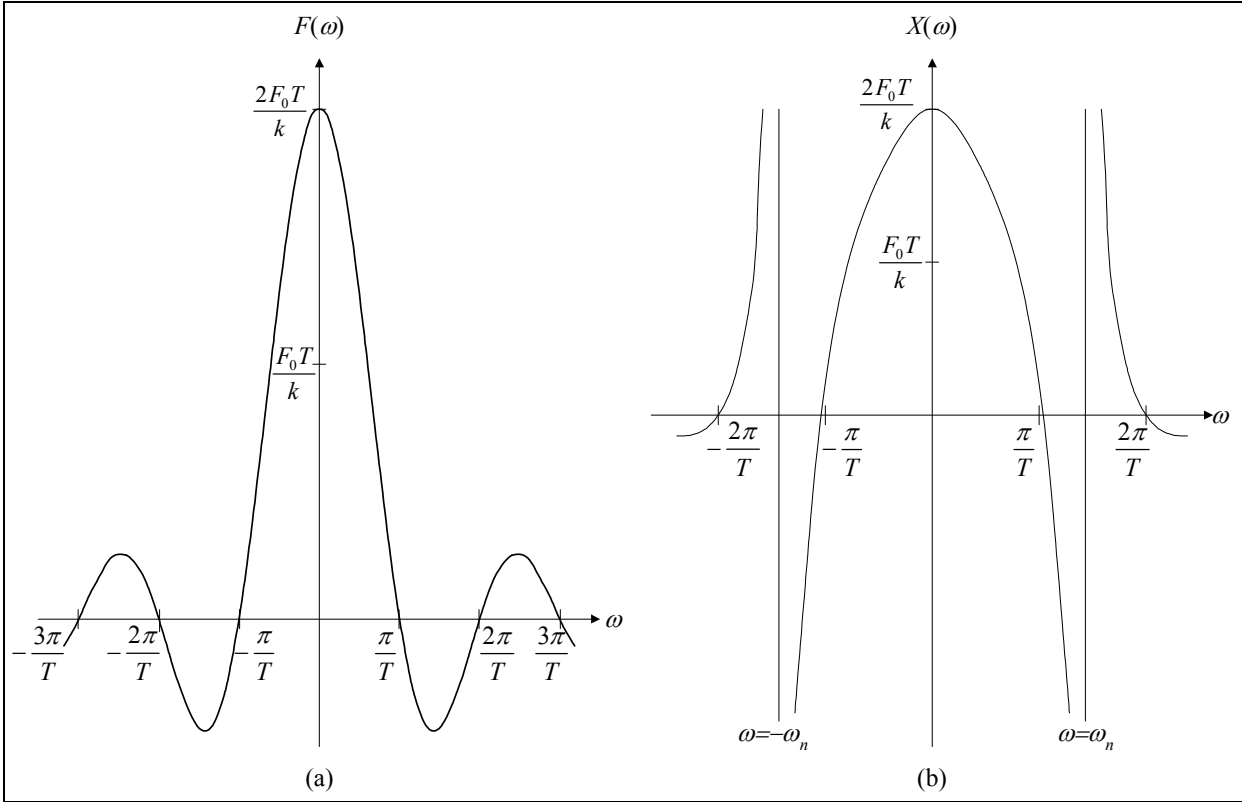


Figura 4.11 - Espectros de frequência.